А. В. Соколов, В. Л. Шагин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотеке Biblio-online.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517.1(075.32)
ББК 22.161я723
С59

Авторы:

Соколов Александр Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, доцент кафедры высшей математики Департамента математики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Шагин Вадим Львович — кандидат геолого-минералогических наук, доцент Департамента прикладной экономики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Рецензенты:

Рябенький В. С. — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института;

Быков А. А. — доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Соколов, А. В.

С59 Математический анализ. Базовые понятия : учеб. пособие для СПО / А. В. Соколов, В. Л. Шагин. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 245 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-9916-9072-0

Учебное пособие посвящено основам математического анализа. В нем в доходчивой форме объясняется происхождение и существо фундаментальных понятий, на которых строится теория: предел, непрерывность, производная, интеграл; подробно рассматриваются методы исследования функций и построения графиков. Изложение теоретических вопросов сопровождается иллюстрирующими примерами, а также многочисленными задачами и вопросами, позволяющими оценить степень усвоения материала. Предлагаемое учебное пособие следует рассматривать как дополнение к основному учебнику по курсу математического анализа, рекомендованному преподавателем данной дисциплины.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, изучающих высшую математику. Пособие будет полезно также для учащихся и преподавателей средней школы профильного математического образования, подготовительных курсов и математических кружков.

УДК 517.1(075.32)
ББК 22.161я723

ISBN 978-5-9916-9072-0

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие содержит основные понятия математического анализа, которые являются фундаментом построения всей теории. Рассмотрение начинается с понятия предела, на котором базируются все остальные понятия. Глубокое усвоение этого базового понятия существенно облегчит понимание всех остальных понятий математического анализа. Понятие предела строится на принципах, новых для учащихся средней школы, изучающих элементарную математику, и вызывает большие затруднения для восприятия. Поэтому в пособии значительное место уделяется разъяснению происхождения и смысла этого понятия. Для лучшего усвоения предлагается игровой подход к его определению.

Затем последовательно вводятся и разъясняются понятия непрерывности функций и производной. На базе введенных понятий подробно рассматриваются этапы исследования функций и построения графиков. Завершается пособие рассмотрением понятия интеграла.

Все вводимые понятия снабжаются качественной интерпретацией, что позволит более наглядно представить и осмыслить их содержание. Изложение теоретических вопросов сопровождается многочисленными примерами. В конце каждого раздела приведены упражнения в виде задач для самостоятельного решения, а также контрольные вопросы для проверки правильности усвоения материала. Задачи имеют разную степень сложности. Наиболее сложные задачи помечены звездочкой. В конце пособия имеются ответы к упражнениям. В пособии приведены строгие доказательства большинства утверждений. Сложные места доказательств снабжены пояснениями.

В настоящее время с элементами математического анализа учащиеся начинают знакомиться еще в школе, в 10—11 классах. Однако в школьных учебниках не дается строгого определения понятия предела, на котором базируется весь курс математического анализа. По математическому анализу написано много вузовских учебников различной степени сложности. В качестве относительно доходчивых и в то же время строгих и основательных можно предложить ставший уже классическим учебник Г. М. Фихтенгольца [3], а также учебник Л. Д. Кудрявцева [1], читавшего курс в Московском физико-техническом институте, и учебник для втузов Н. С. Пискунова [2]. Для предварительного более глубокого знакомства с понятием функции, чем это дается в школьных учебниках, авторы рекомендуют обратиться к учебному пособию [4].

Пособие предназначено для студентов средних профессиональных учебных заведений, изучающих высшую математику. Оно будет полезно также для учащихся и преподавателей средней школы профильного математического образования, подготовительных курсов и математических кружков.

В результате изучения изложенного в данном пособии курса математического анализа учащийся должен освоить:

трудовые действия

- владеть навыками применения теории пределов для определения сходимости числовых последовательностей и установления непрерывности или разрывности функций;
- владеть навыками дифференциального исчисления для исследования характера поведения функций и построения их графиков, а также для нахождения оптимальных решений;
- владеть навыками интегрального исчисления для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения и решения задач на движение;

необходимые умения

- вычислять пределы последовательностей;
- вычислять пределы функций в точке и в бесконечности;
- вычислять производные для элементарных функций;
- составлять уравнения касательных к графикам функций;
- вычислять экстремумы функций;
- строить графики функций;
- исследовать функции по их графикам;
- вычислять неопределенные и определенные интегралы;
- находить площади плоских фигур и объемы тел вращения;
- применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения задач на нахождение оптимального решения и задач на движение;

необходимые знания

- определения основных понятий математического анализа;
- основные свойства пределов, непрерывных функций, производных, неопределенных и определенных интегралов;
- формулы производных основных элементарных функций, интегралов от простейших элементарных функций;
- геометрический и физический смысл производной;
- геометрический смысл определенного интеграла;
- схему исследования функций и построения их графиков.

Глава 1
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В результате изучения главы 1 студент должен:

знать

• определения и свойства числовой последовательности, числового ряда, предела последовательности, суммы числового ряда, арифметической и геометрической прогрессий;

• формулы расчета длины окружности и площади круга;

уметь

• вычислять пределы последовательностей;

• определять значения n-го члена и суммы всех членов арифметической и геометрической прогрессий;

владеть

• навыками оперирования с простейшими числовыми последовательностями и рядами.

1.1. Понятие о пределе

Слово «предел» употребляется в повседневной речи в различных сочетаниях, например: «на пределе возможностей», «до какого предела можно дойти...», «беспредел» (как отсутствие предела) и т.д. Этим словом обычно обозначают рубеж, который нельзя переступить («предел, его же не прейдеши» (из Библии)). При этом часто подразумеваются некоторая последовательность, серия ситуаций, явлений, положений, приближающихся к этому рубежу.

Такое понимание предела первоначально было свойственно и математике, использующей его, в частности, для определения площади круга и длины окружности. Площадь круга и длина окружности определялись как предел (недостижимый) соответственно площадей и периметров вписанных и описанных правильных многоугольников. В самом деле, площадь любого вписанного многоугольника меньше площади круга, а описанного, наоборот, всегда больше. Аналогичное утверждение справедливо и для периметров вписанных и описанных правильных многоугольников. А при неограниченном увеличении числа их сторон соответствующие величины вписанных и описанных фигур стремятся к одной и той же величине, которая и принимается за площадь круга или длину окружности соответственно.

Формулируя определения понятия, заимствованного из обыденной речи, математика обычно сохраняет его основной смысл, при этом уточняя его таким образом, чтобы оно понималось однозначно. Такое уточнение называется *экспликацией* понятия. При этом некоторые нюансы понятия могут быть исключены. Так произошло и с понятием предела. В процессе развития математики понятие предела было расширено. Из него было исключено свойство непревосходимости рубежа, однако осталась идея стремления к ней в бесконечном ряду шагов. В современном толковании предельное значение может быть достигнуто и на конечных шагах и может быть превзойдено и снизу, и сверху.

Так, например, математики считают, что бесконечная последовательность чисел 2; 2; 2; 2; 2; ... имеет предел, равный двум, а последовательность $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...$ с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ имеет предел, равный нулю.

Понятие предела является фундаментальным, базисным понятием математического анализа. На основе понятия предела строятся более сложные понятия, такие как непрерывность функции, производная, интеграл, определяются понятия длины кривой, площади плоской фигуры с криволинейными границами, объема тела и т.д.

Понятие предела по своей природе динамическое, в отличие от рассматриваемых в школе статических понятий, т.е. оно связано с процессом, с так называемым предельным переходом.

С помощью понятий, в основе которых лежит понятие предела, ведутся расчеты траекторий космических кораблей, рассчитываются конструкции самолетов, строятся всевозможные приборы, определяются месторождения полезных ископаемых и т.д.

К осмыслению и четкому формулированию понятия предела математическая мысль шла тысячелетия. С явлениями, приводящими к понятию предела, люди сталкивались еще в древние времена при попытке бесконечного деления некоторой величины. Так, до наших дней дошла древнегреческая апория (доказательство парадоксального утверждения) элейского философа Зенона (V в. до н.э.). Зенон утверждал, что легендарный быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, с какой бы скоростью она ни убегала от него. Его доказательство сводится к следующему: когда Ахиллес добежит до того места, где черепаха находилась в данный момент, она уже уползет на некоторое расстояние вперед. Когда Ахиллес добежит до нового места, куда переместилась черепаха, она уползет еще на какое-то расстояние и т.д. до бесконечности. Парадокс этот легко разрешается с помощью понятия предела: суммарное время, за которое Ахиллес преодолевает все уменьшающиеся отрезки пути, отделяющие его от черепахи, оказывается конечным, хотя самих этих отрезков и бесконечное количество.

Рассмотрим подробнее описанную ситуацию. Пусть Ахиллеса от черепахи отделяет расстояние в 1 км и он бежит равномерно со скоростью 4 км/ч, а черепаха убегает от него тоже равномерно со скоростью 2 км/ч[1]. Проиллюстрируем процесс соревнования Ахиллеса с черепахой. Нанесем на числовую ось *Ox* начало отсчета — точку, в которой находился Ахиллес

[1] У Зенона Ахиллес бежит в 10 раз быстрее черепахи и в начальный момент их отделяет 1000 стадий (греческая мера длины). Нами взяты другие, достаточно условные цифры для упрощения иллюстрации.

в начале соревнования. Обозначим ее цифрой 0. Тогда черепаха в начале соревнования будет находиться в точке $x = 1$ (км) (рис. 1.1). В рамочке указано время, прошедшее с начала соревнования. В момент начала соревнования оно равно нулю.

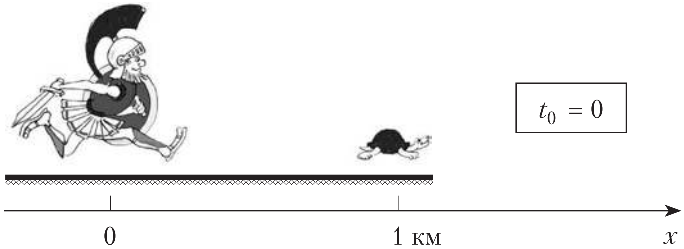


Рис. 1.1. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Начальная позиция**

Через 1/4 ч Ахиллес достигнет того места, где находилась черепаха в начале соревнования, т.е. отметки $x = 1$ км ($t_1 = \dfrac{1\,\text{км}}{4\,\text{км/ч}} = \dfrac{1}{4}$ ч), а черепаха тем временем переместится на 1/2 км: $S_1 = 2\,\text{км/ч} \cdot 1/4\,\text{ч} = 1/2\,\text{км}$ (рис. 1.2).

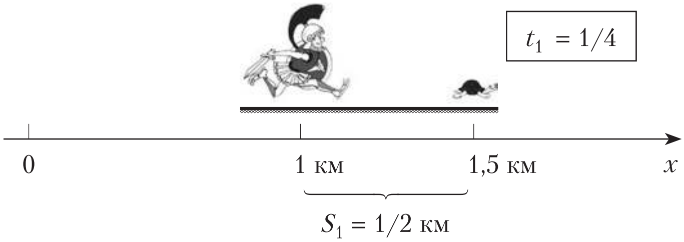


Рис. 1.2. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Позиция через 1/4 ч**

Через 1/8 ч Ахиллес достигнет того места, где находилась черепаха в момент $t_1 = 1/4$ — в отметке $x = 1{,}5$ км ($t_2 = \dfrac{0{,}5\,\text{км}}{4\,\text{км/ч}} = \dfrac{1}{8}$ ч), а черепаха тем временем переместится на 1/4 км: $S_2 = 2\,\text{км/ч} \cdot 1/8\,\text{ч} = 1/4\,\text{км}$ (рис. 1.3) и т.д.

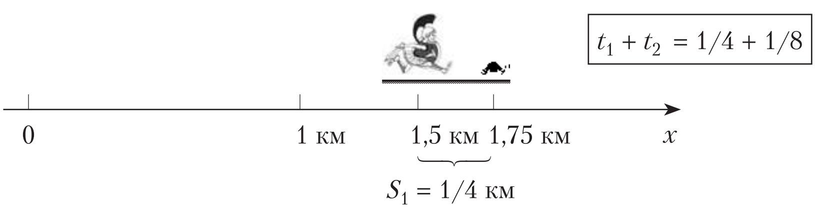


Рис. 1.3. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Позиция через следующие 1/8 ч**

Поскольку скорость черепахи в два раза меньше скорости Ахиллеса, расстояние, пробегаемое Ахиллесом (и проходимое черепахой), а также время, затрачиваемое на его преодоление, на каждом следующем этапе рассмотрения сокращается вдвое.

Отложим на рассматриваемой оси точку $x = 2$ (км). Нетрудно видеть, что на каждом следующем этапе отрезок от последней отметки до точки $x = 2$ делится новой отметкой пополам (рис. 1.4).

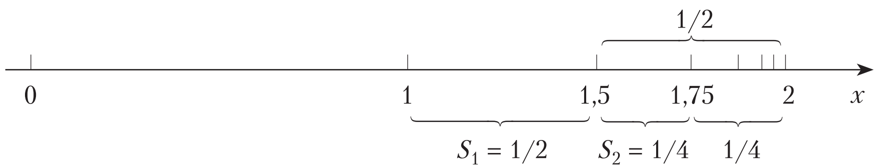


Рис. 1.4. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Деление отрезков пополам**

При таком рассмотрении процесса соревнования все отметки будут лежать левее точки $x = 2$. Тем не менее они будут сколь угодно близко подступать к точке $x = 2$ — какую бы точку левее точки $x = 2$ мы ни взяли, всегда на каком-то этапе появится отметка правее ее, поскольку расстояние от отметки до точки $x = 2$ каждый раз уменьшается вдвое и, таким образом, стремится к нулю. Сложив все расстояния между соседними отметками: $S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$, мы получим длину полуинтервала от $x = 1$ до $x = 2$ — единицу (от отрезка этот полуинтервал отличается одной точкой $x = 2$, которая, как известно, имеет нулевую длину):

$$S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^n + ... = 1.$$

Это расстояние пройдет черепаха. Ахиллес же пройдет, кроме того, еще 1 км, т.е. всего 2 км.

Ясно, что около точки 2 расстояние между Ахиллесом и черепахой постепенно сократится до нуля, т.е. фактически Ахиллес догонит черепаху. Посмотрим, сколько на это понадобится времени. Как уже говорилось, время, затрачиваемое на каждый следующий этап, сокращается вдвое. Таким образом, все время рассматриваемого соревнования составит

$$t = t_1 + t_2 + ... + t_n + ... = 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^{n+1} + ...$$

Вынесем за скобку 1/2. Тогда, как только что было установлено, получим

$$t = 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^{n+1} + ... = 1/2(1/2 + 1/4 + ... + 1/2^n + ...) = 1/2 \cdot 1 = 1/2,$$

т.е. на самом деле весь процесс соревнования займет полчаса.

Весь парадокс заключался в том, что Зенон искусственно разбил время (в нашем примере — полчаса) на бесконечное число частей и решил, что раз количество частей бесконечно, то процесс никогда не закончится. На самом же деле, поскольку эти части очень быстро уменьшаются от этапа к этапу (в нашем случае — в два раза), то оказывается, что их общая сумма конечна. Заметим, кстати, что не всякая бесконечная сумма убывающих и даже стремящихся к нулю чисел конечна. Например, сумма так называемого гармонического ряда $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n + ...$ бесконечна. Но об этом пойдет речь ниже.

В древнем мире тем не менее понятие предела неявно использовали при вычислении площади круга и других плоских фигур. Однако введение в математику и осмысление понятия предела как самостоятельного понятия произошло лишь в XVII в. благодаря работам великого английского математика, физика и философа Исаака Ньютона. Первоначально оно еще не носило отчетливого характера. В уточнение и формализацию понятия предела внесли вклад многие выдающиеся ученые XVII—XIX вв., пока оно не приобрело современные очертания.

Понятие предела, как уже упоминалось, существенно опирается на понятие бесконечности, подразумевает бесконечный процесс. Этот процесс необязательно связывать со временем. Его можно трактовать как последовательность некоторых этапов, следующих один за другим. В математике этапность процесса выразилась в понятии последовательности, рассмотрением которого мы и займемся в следующем параграфе.

1.2. Бесконечные числовые последовательности

1.2.1. Определение последовательности

С понятием числовой последовательности вы уже встречались, изучая арифметическую и геометрическую прогрессии. Мы тоже будем здесь рассматривать бесконечные числовые последовательности, причем слова «бесконечная» и «числовая» будем опускать.

Вообще говоря, числовая последовательность — это бесконечный набор чисел, взятых в определенном порядке. Строгое математическое определение последовательности дается через понятие функции от натурального аргумента.

Определение 1.1. *Последовательностью* называется числовая функция $f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Кстати говоря, сам натуральный ряд чисел тоже представляет собой последовательность, в которой $f(n) = n$.

Напомним, что многоточие в конце записи означает, что данная последовательность чисел бесконечна.

При конкретном n выражение $f(n)$ называется n-м членом последовательности. Обычно n-й член последовательности обозначается некоторой буквой с индексом, например a_n, т.е. $a_n = f(n)$, а сама последовательность — через $\{a_n\}$. Таким образом, $a_1 = f(1)$ — первый член последовательности, $a_2 = f(2)$ второй член последовательности и т.д.

Чаще всего последовательность задается формулой, определяющей связь номера n члена последовательности с ее n-м членом, например $a_n = \frac{n-3}{n^2}$. Такую запись называют также *общим членом последовательности*. Подставляя вместо n любые натуральные числа, будем получать соответствующие ее члены. В данном примере

$$a_1 = \frac{1-3}{1^2} = -2, \quad a_2 = \frac{2-3}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{3-3}{3^2} = 0 \text{ и т.д.}$$

Здесь важно уяснить, что вместо буквы n, выполняющей роль индекса в левой части равенства $a_n = \frac{n-3}{n^2}$, и буквы n, стоящей на всех местах в правой его части, необходимо подставлять одно и то же число.

Иногда последовательность задается несколькими первыми членами, по которым можно установить закономерность, например: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4};...$ или, более точно:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{n}; ... .$$

Иногда требуется по нескольким первым членам последовательности вывести формулу для общего ее члена. Эта задача не всегда простая и требует определенной изобретательности. К тому же одному и тому же фрагменту последовательности может соответствовать несколько различных формул. В таких случаях речь идет о наиболее простой, естественной формуле.

Пример 1.1

Выведем формулу общего члена последовательности 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... .

Решение. По-видимому, имеется в виду последовательность нечетных чисел. Нечетные числа обычно задаются формулой $2n + 1$. Примерим ее для нашей последовательности. Если считать, что нумерация начинается с члена № 1, то при $n = 1$ по приведенной формуле получаем 3, а нужно 1. Следовательно, нужно уменьшить значение, получаемое по формуле, на 2, т.е. положить $a_n = 2n - 1$.

Пример 1.2

Выведем формулу общего члена последовательности 1; 2,5; 5; 8,5; 13; 18,5 ... .

Решение. Можно заметить, что в этой последовательности целые числа чередуются с дробными, причем дробная часть равна 0,5. Для облегчения задачи умножим все эти числа на 2 (впоследствии произведем обратную операцию). Тогда получим последовательность 2; 5; 10; 17; 26; 37; ... . Можно догадаться, что если от каждого из этих чисел отнять 1, получим последовательность квадратов натуральных чисел 1; 4; 9; 16; 25; 36; ... .

Таким образом, исходная последовательность может быть получена из формулы

$$a_n = \frac{n^2+1}{2}.$$

Если число членов заданной последовательности достаточно велико, можно прикинуть формулу по нескольким первым членам, а затем проверить ее справедливость путем подстановки следующих номеров и сравнения с оставшимися заданными членами.

Последовательности могут задаваться и более сложным образом, когда нельзя их свести к формулам. Примерами такого рода последовательностей могут служить последовательность цифр в десятичном представлении числа $\sqrt{2}, \sqrt{2} = 1{,}41421356...$ или последовательность простых чисел 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;.... Известно, что и в том и в другом случае существуют алгоритмы нахождения любого члена этих последовательностей, но связать конечной формулой номер члена и сам этот член не удается.

Вам уже известно, что любое действительное число можно представить в виде последовательности десятичных знаков, отделив дробную часть (если она есть) от целой части запятой. При этом рациональные числа можно изобразить конечной последовательностью цифр или бесконечной последовательностью с периодической частью. Например, число 25,2 можно еще записать как 25,20, или 25,200 и т.д., или даже как 25,2000... и даже как 25,1999999..., т.е. 25,1(9). Число $\frac{1}{3}$ нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, а только в виде бесконечной периодической десятичной дроби: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$, число $\frac{27}{70}$ — тоже: $\frac{27}{70} = 0{,}38571428571428571 42... = 0{,}3(857142)$. Иррациональные числа можно записать только в виде бесконечной *непериодической* десятичной дроби.

Пример 1.3

Определим 124-ю цифру после запятой в десятичном представлении дроби $\frac{1}{7}$.

Решение. Разделив уголком 1 на 7 до выявления периода, т.е. до момента появления остатка, который уже встречался (далее цифры в частном будут повторяться), получим 0,(142857):

$$\frac{1}{7} = 0{,}\underbrace{\underbrace{142857}_{\text{период}}\underbrace{142857}_{\text{период}}...\underbrace{142857}_{\text{период}}}_{20\ \text{периодов}\,=\,120\ \text{цифр}}1428...\,.$$

Период содержит шесть цифр. Разделим 124 на 6 с остатком. Получим 20 и 4 в остатке. Таким образом, 124 цифры после запятой в десятичном представлении дроби $\frac{1}{7}$ содержит 20 полных периодов и еще четыре цифры. Отсчитав четвертую цифру от начала периода, получим 8. Это и есть искомая цифра.

Замечание 1.1. Зададимся вопросом: до каких пор следует продолжать деление уголком, если требуется найти период десятичной дроби, равной ее обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. При делении натурального числа m на натуральное число n уголком получаются цифры из частного и остатки от деления, к которым приписываются очередные цифры из числа m. Когда цифры из числа m заканчиваются, к остаткам приписываются нули. С этого момента нужно следить за получающимися остатками. Если остаток повторится, деление можно прекратить, поскольку ситуация начнет повторяться: будут получаться те же цифры в частном и те же остатки.

Пример 1.4

Определим последнюю цифру в десятичном представлении числа 2^{833}.

Решение. Найдем закономерность в последовательности последних цифр степеней двойки: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^2 = 16$, $2^5 = 32$ и т.д. Таким образом, последние цифры степеней двойки образуют последовательность 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... с периодом 4: (2, 4, 8, 6).

Остаток от деления 833 на 4 равен 1. Значит, искомая цифра равна 2.

Иногда последовательность задается так называемой рекуррентной формулой, когда следующий член определяется через один или несколько предыдущих. В этих случаях один или несколько первых членов должны быть заданы явно.

Пример 1.5

Определим пятый член последовательности, заданной условиями $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n + 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Решение. Находим последовательно третий, четвертый и пятый члены: $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 0$.

Сложнее в таких случаях найти формулу общего члена последовательности (см. подпараграф 1.2.4).

Пример 1.6

Найдем пять первых членов последовательности $a_n = \arcsin(\sin n)$.

Решение. Известно, что $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем:

$a_1 = \arcsin(\sin 1) = 1$, поскольку $1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_2 = \arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$, поскольку $\pi - 2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_3 = \arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$, поскольку $\pi - 3 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_4 = \arcsin(\sin 4) = \arcsin(\sin(\pi - 4)) = \pi - 4$, поскольку $\pi - 4 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_5 = \arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi$, поскольку $5 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 1.7

Задана последовательность $a_n = 3n - 40$. Найдем наименьшее значение суммы $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Решение. Очевидно, что последовательность $a_n = 3n - 40$ является арифметической прогрессией, поскольку разность $a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 40] - (3n - 40) = 3$ не зависит от n.

Поскольку $a_n < 0$ при $3n - 40 < 0$, или при $n \le 13$, и $a_n > 0$ при $3n - 40 > 0$, или при $n \ge 14$, то сумма S_n с увеличением n сначала убывает (до значения S_{13}), а затем возрастает. Наименьшее значение суммы равно S_{13}. Применяя формулу суммы членов арифметической прогрессии, получим

$$S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\cdot 13=\frac{(-37)+(-1)}{2}\cdot 13=-247.$$

Пример 1.8

Пусть известно, что при любом натуральном n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n=n^3-3n$. Найдем общий член этой последовательности.

Решение. Для любой последовательности справедлива формула $a_n=S_n-S_{n-1}$, $n>1$, где $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ (докажите). Применим эту формулу:

$$a_n=(n^3-3n)-[(n-1)^3-3(n-1)]=n^3-(n-1)^3-3=3n^2-3n-2.$$

Замечание 1.2. Обычно нумерацию членов последовательности ведут, начиная с единицы. Это естественно: первый член получает номер 1, второй — номер 2 и т.д. Соответственно и индекс в записи общего члена указывает на номер (место) этого члена последовательности. Но употребляется и иная нумерация. Иногда удобнее начинать нумерацию с другого целого числа (положительного, нулевого или даже отрицательного). В этом случае место в последовательности не совпадает с индексом члена, например: $a_n=\dfrac{1}{n-1}$, n = 2, 3 ... . Более того, иногда употребляется разреженная индексация, например a_{2n+1}, n = 0, 1, 2, ..., которая определяет члены последовательности с номерами 1, 3, 5, ...

Замечание 1.3. Здесь мы обозначали члены последовательности символом a_n. Однако их можно было обозначать и другими буквами, например b_n или x_i и т.п. В математической литературе используются различные обозначения. Чтобы привыкнуть к этому факту и видеть за разнообразием обозначений единый смысл, в дальнейшем мы тоже будем разнообразить обозначения членов последовательностей.

1.2.2. Графическое изображение последовательностей

Последовательности удобно изображать графически. Существует два способа отображения последовательностей: на числовой прямой и на координатной плоскости.

На рис. 1.5 и 1.6 приведены примеры изображения последовательности $a_n=\dfrac{1}{n}$ соответственно на числовой прямой и на координатной плоскости. На числовой прямой (см. рис. 1.5) значения соответствующих членов последовательности изображаются точками и помечаются символами a_n, чтобы можно было установить их номера. На плоскости в декартовой системе координат изображается график функции $f(n)$, где на горизонтальной оси откладывается значение аргумента, а на вертикальной — значение функции (члена последовательности). Заметим, что функция в этом случае задается только для натуральных значений аргумента (см. рис. 1.6).

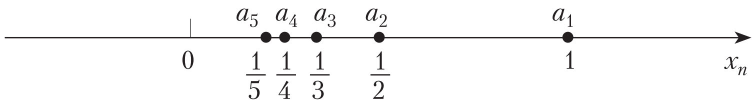


Рис. 1.5. **Изображение последовательности на числовой прямой**

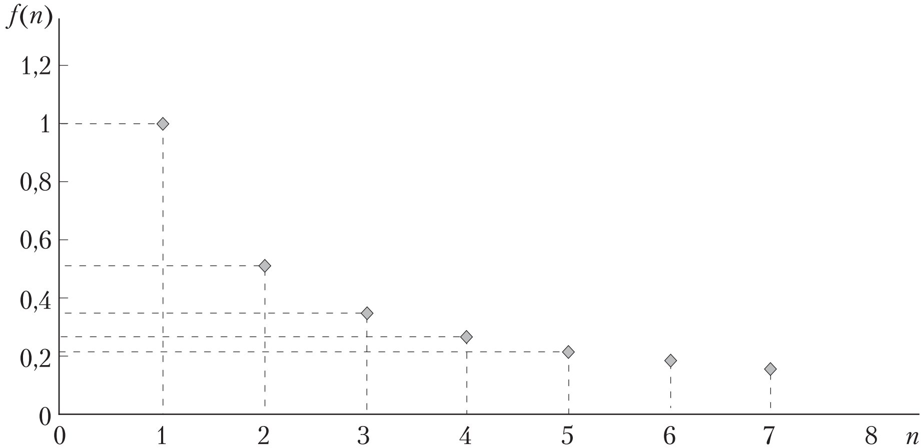


Рис. 1.6. **Изображение последовательности на координатной плоскости**

Понятно, что все члены последовательности мы изобразить не можем, поскольку их бесконечное множество. Однако тенденцию их расположения при неограниченном увеличении n обычно проследить удается.

Графическое изображение последовательности может облегчить процедуру подбора формулы для последовательности чисел по нескольким первым членам. Для этого следует изобразить на плоскости соответствующие точки и «увидеть» класс функций, которыми может описываться искомая последовательность. Затем задать функцию с неопределенными коэффициентами и по заданным первым членам установить эти коэффициенты. Так, для примера 1.2, рассмотренного выше, изобразим наши точки на графике (рис. 1.7).

Похоже, что точки графика ложатся на параболу. Остается только подобрать коэффициенты квадратичной функции.

Пусть последовательность задается формулой $f(n) = an^2 + bn + c$, где a, b, c — неопределенные коэффициенты. Подставив в формулу первые три члена последовательности, получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 4a+2b+c=2{,}5, \\ 9a+3b+c=5. \end{cases}$$

Решив систему ($a=c=0{,}5$; $b=0$), определяем формулу $f(n)=\dfrac{n^2+1}{2}$, которая задает по крайней мере первые три члена последовательности. Остается проверить, что она подходит и для остальных ее членов.

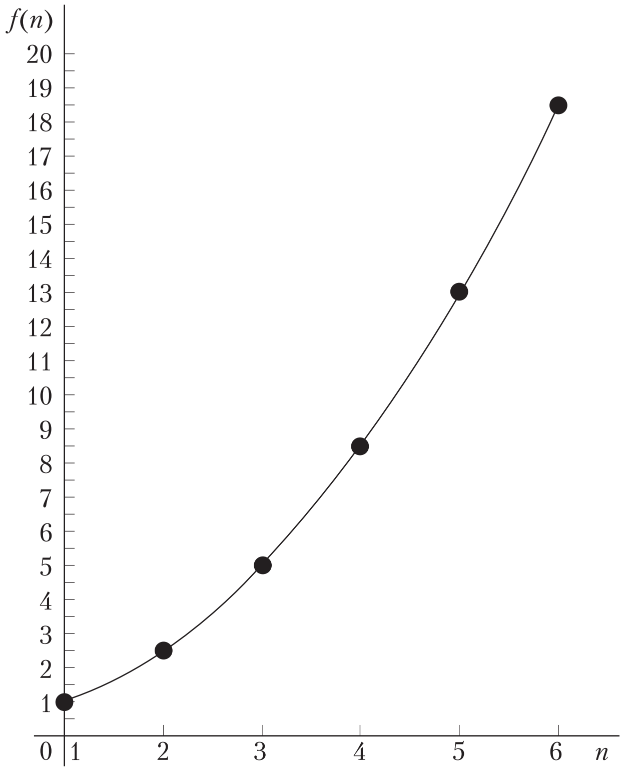


Рис. 1.7. **Изображение точек последовательности на графике**

1.2.3. Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность

Здесь нас будут интересовать такие свойства последовательностей, как монотонность и ограниченность. Для последовательностей как функций натурального аргумента эти понятия фактически являются частным случаем соответствующих понятий для функций действительной переменной, если область определения последних сузить до множества натуральных чисел. Здесь приведем определения этих понятий в обозначениях, принятых для последовательностей.

Все последовательности по признаку монотонности делятся на монотонные и немонотонные. Монотонные последовательности делятся на неубывающие и невозрастающие (рис. 1.8).

Определение 1.2. Последовательность с общим членом a_n называется *неубывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. $a_{n+1} \geq a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Определение 1.3. Последовательность с общим членом a_n называется *невозрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Последовательность 1; 1; 2; 2; 3; 3; ... — неубывающая, так же как и последовательность 1; 2; 3; ... . Последовательность $1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ldots$ — невозрастающая, так же как и $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$. Последовательность-константа 5; 5; 5; 5; ... ($a_n = 5$) является одновременно и неубывающей, и невозрастающей.

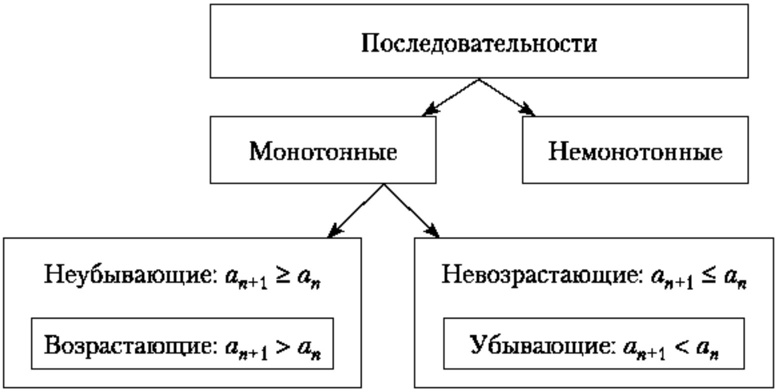


Рис. 1.8. **Классификация последовательностей по признаку монотонности**

Из множества всех неубывающих последовательностей выделяется подмножество возрастающих последовательностей, а из множества всех невозрастающих последовательностей выделяется подмножество убывающих последовательностей.

Определение 1.4. Последовательность с общим членом a_n называется (*монотонно*) *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. $a_{n+1} > a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Определение 1.5. Последовательность с общим членом a_n называется (*монотонно*) *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. $a_{n+1} < a_n$, $n = 1; 2; 3, \ldots$.

Пример 1.9

Исследуем на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{1-n^2}{n}$.

Решение. Вычислим разность соседних членов последовательности в общем виде:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)^2}{n+1} - \frac{1-n^2}{n} = \frac{-n^2-n-1}{(n+1)n} < 0, n = 1; 2; 3; \ldots .$$

Таким образом, $a_{n+1} < a_n$, $n = 1; 2; 3, \ldots$, откуда следует, что последовательность убывающая.

Пример 1.10

Исследуем последовательность $a_n = \sin\frac{\pi n}{6}$ на монотонность.

Решение. Интуиция подсказывает, что последовательность не монотонна, поскольку синус будет многократно изменять свой знак. Для доказательства достаточно привести пример таких трех членов с возрастающими номерами, что средний из них больше (или меньше) крайних. Возьмем, например, члены с номерами $n = 1$,

$n = 3$, $n = 6$. Подстановкой этих номеров в выражение для общего члена получим $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_6 = 0$, т.е. $a_1 < a_3$, но $a_3 > a_6$. Значит, последовательность не является ни неубывающей, ни невозрастающей, следовательно, она не монотонна.

По признаку ограниченности все последовательности могут быть разбиты на два класса: ограниченные и неограниченные.

Определение 1.6. Последовательность с общим членом a_n называется *ограниченной*, если существует такое число C, что $|a_n| \le C$ для любого n, $n = 1; 2; 3; ...$, т.е. все ее члены заключены в некотором отрезке $[-C; C]$. В противном случае (т.е. если для любого C найдется такое натуральное число n, что будет $|a_n| > C$) последовательность называется *неограниченной*.

Так, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является ограниченной, поскольку $|a_n| \le 1$, $n = 1; 2; 3; ...$. Здесь взято $C = 1$, но можно было взять и любое большее число. В то же время последовательность $a_n = -2n$ является неограниченной, поскольку какое бы число C мы ни взяли, всегда можно найти такое n, что будет $|-2n| > C$. Действительно, достаточно взять $n > \frac{|C|}{2}$, например $\left[\frac{|C|}{2}\right] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наименьшее целое число, не превосходящее x.

Различают также последовательности, ограниченные или неограниченные сверху или снизу.

Определение 1.7. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $a_n \le C$, и *неограниченной сверху* — в противном случае.

Определение 1.8. Последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $a_n \ge C$, и *неограниченной снизу* — в противном случае.

Очевидно, что последовательность, ограниченная и сверху, и снизу, будет ограниченной. Если же последовательность неограничена сверху или снизу, она будет неограниченной.

Замечание 1.4. В определении 1.6 условие существования такого C, что $|a_n| \le C$, можно заменить на условие существования двух чисел C_1 и C_2, таких что $C_1 \le a_n \le C_2$, т.е. чтобы все члены последовательности содержались на отрезке $[C_1; C_2]$.

Пример 1.11

Докажем, что последовательность с общим членом $a_n = n^2 - 2n + 3$ не ограничена сверху, но ограничена снизу.

Решение. Докажем неограниченность сверху. Действительно, пусть задано число C. Покажем, что можно найти такое n, что будет выполняться неравенство

$$a_n = n^2 - 2n + 3 > C. \tag{1.1}$$

Преобразуем левую часть неравенства: $a_n = n^2 - 2n + 3 = (n-1)^2 + 2$ Таким образом, для того чтобы выполнялось неравенство (1.1), достаточно взять n такое, чтобы $(n-1)^2+2>C$, или $(n-1)^2>C-2$. Если $C<2$, это неравенство выполняется для любого n. Если же $C \geq 2$, достаточно взять n такое, чтобы $(n-1)>\sqrt{C-2}$, или $n>\sqrt{C-2}+1$, например $n=[\sqrt{C-2}+1]+1$.

Докажем ограниченность снизу. Возьмем $C=2$. Тогда

$$a_n=n^2-2n+3=(n-1)^2+2 \geq 0+2=C,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.12

Исследуем на ограниченность и монотонность последовательность $a_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}$.

Решение. Имеем $a_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}=1{,}5-\dfrac{2{,}5}{2n+1}$. Поскольку с увеличением n дробь $\dfrac{2{,}5}{2n+1}$ убывает, оставаясь положительной, то a_n возрастает, оставаясь меньше 1,5 при всех натуральных n. Наименьшее значение a_n достигает при $n=1$ и равно $a_1=\dfrac{2}{3}$. Последовательность ограниченная и монотонно возрастающая.

Можно и иначе исследовать последовательность на монотонность, как это делалось в примере 1.9. Имеем

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+1}-\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3n+2}{2n+3}-\frac{3n-1}{2n+1}=$$
$$\frac{(6n^2+7n+2)-(6n^2+7n-3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{5}{(2n+3)(2n+1)}>0.$$

Отсюда следует, что последовательность монотонно возрастающая.

Замечание 1.5. Возможен и иной способ решения данного примера. А именно, рассматривается функция $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$, $x>0$. Далее исследуются ограниченность этой функции и ее монотонность (с помощью производной — см. гл. 4). А поскольку $a_n=f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то некоторые свойства функции переносятся и на последовательность. В частности, если функция монотонная, то и последовательность монотонная. Если, однако, функция не является монотонной, то это еще не значит, что последовательность также не является монотонной (немонотонный характер функции между двумя соседними целыми числами может не проявиться при переходе к натуральному аргументу). Кроме того, мы здесь не используем этот метод, потому что рассмотрение свойств функции и связь этих свойств с производной будут рассматриваться позднее, в последующих главах. И поэтому мы не будем опережать события и опираться на эти методы в данной главе.

Пример 1.13

Исследуем на монотонность и ограниченность последовательность с общим членом $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Решение. Обратим внимание, что $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, т.е. $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$, или

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1}.$$

Но последнее неравенство при любом натуральном n равносильно неравенству $(n+1)^2 > n(n+2)$, справедливость которого непосредственно проверяется раскрытием скобок.

Ограниченность последовательности вытекает из двойного неравенства $0 < \frac{n}{n+1} < 1$, справедливого при любом натуральном n.

1.2.4. Метод математической индукции

С понятием последовательности связан один из мощнейших методов получения новых математических знаний, так называемый *метод математической индукции*[1]. В противоположность *дедуктивному методу*, в соответствии с которым из общих утверждений выводятся частные, индуктивный метод позволяет на основе частных наблюдений получать общие утверждения.

Индуктивный метод применяется не только в математике. Однако в других науках его выводы не носят безусловного характера, поскольку не имеют строгой доказательной базы. Обобщая множество единичных наблюдений, вообще говоря, можно прийти и к ложным выводам. Поэтому полученные выводы необходимо подкрепить анализом причинно-следственных связей, подтверждающим такие заключения.

Иное дело в математике. Метод математической индукции строго обоснован. Он опирается на математический аппарат, и выводы, полученные с его использованием, не нуждаются в дополнительной проверке. Однако этот метод применим только для математических объектов.

В основе метода математической индукции лежит следующий принцип. Пусть задано некоторое утверждение, зависящее от натурального числа n. Если:

1) это утверждение справедливо при $n = 1$;

2) из справедливости утверждения при $n = k$ следует справедливость при $n = k + 1$,

то это утверждение справедливо при любом натуральном n.

Справедливость метода математической индукции достаточно очевидна. Действительно, пусть утверждение $P(n)$ справедливо при $n = 1$, а также известно, что из его справедливости для $n = k$ следует его справедливость для следующего натурального значения $n = k + 1$. И пусть требуется установить его справедливость для $n = N > 1$.

Из первого условия следует справедливость утверждения $P(1)$. Но тогда из второго условия следует справедливость утверждения $P(2)$. Но тогда,

[1] Индукция (от лат. *inductio* — наведение) — переход от частного к общему.

опять же из второго условия, следует справедливость утверждения $P(3)$, затем $P(4)$ и т.д. Поскольку таких переходов от 1 до N конечное число, то в конце концов получим, что справедливо и $P(N)$.

Пример 1.14

Докажем методом математической индукции формулу

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n = 1$ формула справедлива: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Предположим, что формула справедлива при $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Пользуясь этим предположением, докажем, что формула справедлива и при $n=k+1$, т.е. докажем, что $1+2+3+...+k+(k+1)=$ $=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Имеем

$$\underbrace{1+2+3+...+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Пример 1.15

Выведем формулу

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2n-1)^2-(2n)^2=-2n^2-n.$$

Решение. При $n = 1$ формула справедлива: $1^2 - 2^2 = -2 - 1$.

Предположим, что формула справедлива при $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2=-2k^2-k$. Пользуясь этим предположением, докажем, что формула справедлива и при $n=k+1$, т.е. докажем, что

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=-2(k+1)^2-(k+1),$$

или

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=-2k^2-5k-3.$$

Разбивая сумму на две части: первая часть — для $n=k$, вторая — дополнительный член для $n = k + 1$, и учитывая предположение индукции, получим

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=$$
$$=[1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2]+\{(2k+1)^2-[2(k+1)]^2\}=$$
$$=(-2k^2-k)+\{(2k+1)^2-[2(k+1)]^2\}=-2k^2-5k-3.$$

Пример 1.16

Найдем формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1}=2a_n+1, a_1=0$.

Решение. Выпишем несколько первых членов:

$a_1=0,$
$a_2=2\cdot 0+1=1,$
$a_3=2\cdot 1+1=3,$

$a_4 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$
$a_5 = 2 \cdot 7 + 1 = 15,$
...

Сделаем предположение относительно формулы общего члена: $a_n = 2^{n-1} - 1$.

Докажем методом математической индукции, что эта формула справедлива.

Убеждаемся непосредственной проверкой, что для $n = 1$ она справедлива. Пусть она справедлива для $n = k$, т.е. $a_k = 2^{k-1} - 1$. Покажем, что тогда она верна для $n = k + 1$. Из рекуррентной формулы при $n = k + 1$ получим $a_{k+1} = 2(2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1 = 2^{(k+1)-1} - 1$, что и требовалось доказать.

Общий метод решения рекуррентного уравнения вида $a_{n+1} = ka_n + b, k \neq 1$, при начальном условии $a_1 = a$ заключается в следующем. Предполагаем, что решение имеет вид $a_n = ck^n + t$, и подставляем это выражение в рекуррентное уравнение: $ck^{n+1} + t = k(ck^n + t) + b$, откуда получаем искомое значение t: $t = -\frac{b}{k-1}$. Далее необходимо обеспечить выполнение начального условия: $a_1 = ck + t = a$, откуда получаем значение $c = \frac{a-t}{k}$.

Применим этот способ к последнему примеру.

Будем искать решение в виде $a_n = c2^n + t$, где c и t — неопределенные коэффициенты. Подставляем это выражение в рекуррентное уравнение: $c2^{n+1} + t = 2(c2^n + t) + 1$, или $t = 2t + 1$, откуда получаем искомое значение $t = -1$. Далее необходимо обеспечить выполнение начального условия $a_1 = 0$: $c \cdot 2 - 1 = 0$, откуда получаем значение $c = \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_n = 2^{n-1} - 1$.

Замечание 1.6. Иногда утверждение справедливо, начиная не с $n = 1$, а с некоторого иного значения $n = n_1$. Но и в этом случае метод математической индукции работает — доказываемое утверждение будет справедливо для всех целых значений $n \geq n_1$.

Замечание 1.7. В методе математической индукции существенными являются оба положения. Если пренебречь первым положением, то метод окажется несправедливым. Например, заведомо ложное утверждение, что все натуральные числа равны, удовлетворяет второму требованию (из утверждения $k = k + 1$ следует утверждение $k + 1 = k + 2$), но не удовлетворяет первому ($1 = 2$).

Пример 1.17

Определим, при каких натуральных n справедливо неравенство $2^n > 5n + 1$.

Решение. Нетрудно проверить, что неравенство не выполняется при малых значениях n ($n = 1; 2; 3; 4$). При $n = 5$ имеем $2^5 > 5 \cdot 5 + 1$ — справедливое неравенство. Предположим, что неравенство справедливо при $n = k \geq 5$, т.е. предположим, что справедливо неравенство $2^k > 5k + 1$. Пользуясь этим предположением, докажем, что формула справедлива и при $n = k + 1$, т.е. докажем, что $2^{k+1} > 5(k+1) + 1$, или что $2^{k+1} > 5k + 6$. Имеем

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (5k + 1) = 10k + 2 > 5k + 6,$$

что справедливо при всех натуральных k, в том числе и при $k \geq 5$.

Доказываемое неравенство справедливо при $n = 5$. Мы доказали, что из предположения его справедливости при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$. В силу принципа математической индукции заключаем, что оно справедливо при всех натуральных $n \geq 5$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Существуют ли последовательности, для которых невозможно вывести формулу общего члена?

2. Что можно сказать о последовательности цифр в десятичном представлении: а) рациональных дробей; б) иррациональных чисел; в) дробей со знаменателем, равным степеням двойки; пятерки; произведениям степеней двойки и пятерки?

3. Существуют ли последовательности, которые являются одновременно: а) неубывающими и невозрастающими; б) убывающими и неубывающими; в) убывающими и невозрастающими?

4. Как связаны монотонность и ограниченность последовательностей? Любые ли сочетания возможны: возрастающая и ограниченная, возрастающая и неограниченная и т.д.?

5. В чем заключается принцип математической индукции?

6. Покажите на примерах, что выполнение только одного из положений принципа математической индукции не обеспечивает выполнение утверждения при всех натуральных n.

Упражнения

1.1. Может ли последовательность a_n, $n \in \mathbb{N}$, задаваться формулой: а) $a_n = \dfrac{1}{n-3}$; б) $a_n = \sqrt{1000-n}$; в) $a_n = \dfrac{1}{2n-3}$; г) $a_n = \dfrac{5}{2n^2-3n-2}$; д) $a_n = \dfrac{5}{2n^2+3n-2}$?

1.2. Найдите пять первых членов последовательности $a_n = \arccos(\cos n)$.

1.3. Напишите формулу n-го члена последовательности $\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; -\dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \dots$.

1.4. Изобразите графически двумя способами последовательность с общим членом $x_k = \dfrac{1}{2^k}$.

1.5. Определите 300-ю цифру после запятой в десятичном представлении дроби $\dfrac{1}{14}$.

1.6. Определите последнюю цифру в десятичном представлении чисел: а) 3^{2009}; б) $3^{21}+7^{32}$; в) $2^{2^{2008}}$.

1.7. Определите пятый член последовательности, заданной условиями

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = 0, a_2 = 0.$$

1.8. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 3a_n - 1, \quad a_1 = 0$.

1.9. Предложите алгоритм определения n-й цифры после запятой у периодической десятичной дроби.

1.10*. Всегда ли последовательность последних цифр в десятичной записи чисел a^n, $n = 1, 2, 3, \dots$, где a — натуральное число, является периодической?

1.11*. Докажите, что длина наименьшего периода десятичной дроби, равной обыкновенной дроби $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, не превышает $n - 1$. Приведите пример дроби, для которой длина указанного периода равна $n - 1$.

1.12. При каком n сумма $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ наибольшая, если общий член последовательности равен $a_n = 50 - 8n$? Найдите эту сумму.

1.13. Известно, что при любом натуральном n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найдите общий член этой последовательности, докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите ее разность.

1.14. Исследуйте на ограниченность следующие последовательности: а) $a_n = \dfrac{1-5n}{n+3}$; б) $a_n = \dfrac{1+5n}{2n+3}$; в) $a_n = \dfrac{1-5n}{2n-33}$; г) $a_n = \dfrac{1+5n}{7n-23}$; д) $a_n = \dfrac{1-5n^2}{n+3}$; е) $a_n = \dfrac{1-5n^2}{n^2+3n}$.

1.15. Исследуйте на монотонность последовательность с общим членом: а) $a_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{n^2-10n+25}{n^2}$; в) $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2+2}$.

1.16. Покажите, что последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ монотонна и ограничена.

1.17. Покажите, что последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{1-n^2}{n}$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

1.18. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

1.19. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

1.20*. Найдите все значения параметра c, при которых последовательность $a_n = \dfrac{2n+9}{n+c}$ является убывающей.

1.21. Методом математической индукции докажите, что n-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1.22. Методом математической индукции докажите, что n-й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

1.23. Методом математической индукции докажите, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем $q \neq 1$ вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

1.24. Методом математической индукции докажите, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.25. Методом математической индукции докажите, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1.26. Определите, при каких натуральных n справедливо неравенство $2^n > n^2$.

1.3. Предел последовательности

1.3.1. Определение предела последовательности

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = -\dfrac{1}{n}$. Изобразим ее члены на числовой оси и на координатной плоскости (рис. 1.9).

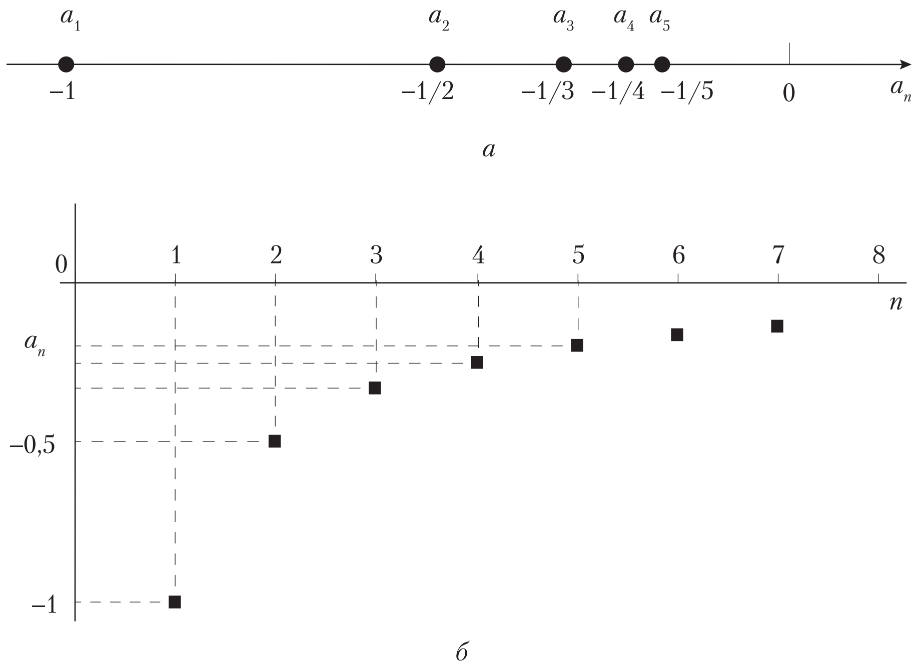


Рис. 1.9. **Последовательность с общим членом $a_n = -\frac{1}{n}$:**

а — на числовой оси; *б* — на координатной плоскости

Как мы видим, точки, изображающие члены последовательности, с ростом номера n накапливаются около точки 0 (значения a_n стремятся к нулю при неограниченном возрастании n). Этот факт обозначается так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (читается: «предел последовательности $\{a_n\}$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Символ lim введен в употребление Исааком Ньютоном и происходит от латинского слова *limes*, что означает предел. Внизу под словом «предел» пишется переменная, которая (когда мы имеем дело с последовательностями) устремляется к бесконечности. Справа от слова «предел» указывается переменная величина, зависящая от номера члена последовательности, предел которой собственно и вычисляется.

Выше мы рассмотрели примеры, в которых предел последовательности не достигается ни на каком шагу. Однако предел может и достигаться, и даже превосходиться на каких-то шагах.

Рассмотрим пример последовательности $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Как ясно из рис. 1.10, точки, соответствующие членам последовательности, поочередно ложатся с разных сторон от нуля, постоянно приближаясь (стремясь) к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Рассмотрим пример последовательности-константы $a_n = 5$. В этом случае все члены последовательности попадают в одну и ту же точку. Принято считать, что эта точка (5) и будет пределом последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$.

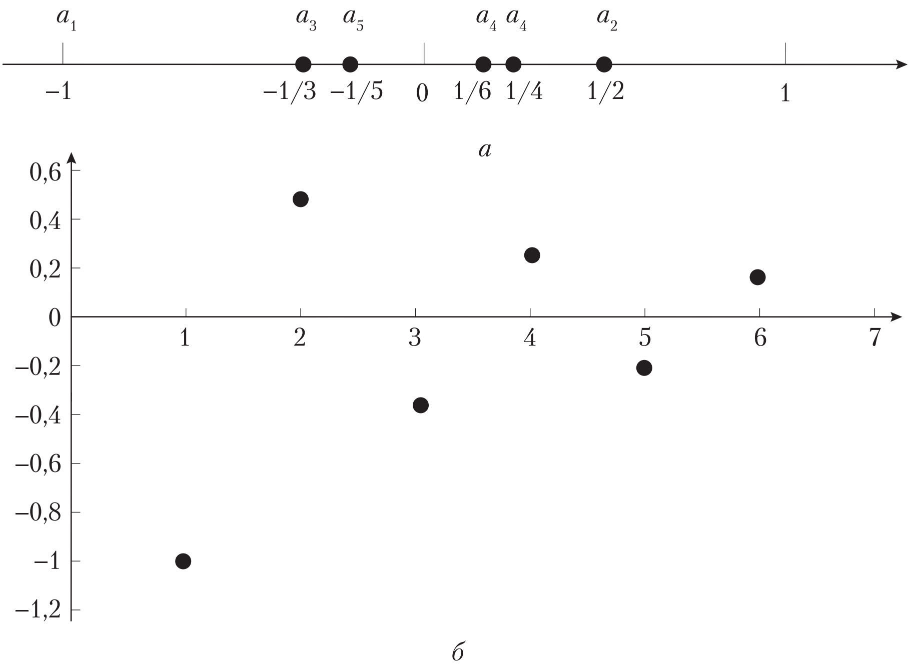


Рис. 1.10. **Последовательность с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$:**

а — на числовой оси; *б* — на координатной плоскости

Замечание 1.8. В практических расчетах часто приходится обрывать последовательность на каком-то (n-м) шаге и считать пределом ее член с этим номером n, поскольку его значение пренебрежимо мало отличается от значения предела.

Итак, мы видели, что смысл предела последовательности состоит в том, что значение n-го члена последовательности при $n \to \infty$ неуклонно приближается к значению предела, причем расстояние между членами последовательности и пределом стремится к нулю.

Такое понимание предела последовательности легло в основу формального определения предела, используемого в современной математике. Прежде чем дать строгое определение, покажем, как оно вытекает из интуитивного понимания предела.

Рассмотрим пример последовательности $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Как показано выше, эта последовательность имеет предел a, равный нулю. Это означает, что расстояние между точками a_n и a (нулем), т.е. величина $|a_n - a|$, стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Это утверждение можно перефразировать так: начиная с некоторого номера N (т.е. при всех $n > N$), величина $|a_n - a|$ может быть сделана сколь угодно малой. Что значит «сколь угодно малой»? Для строгого выражения этой фразы математики придумали остроумное решение — заменили ее следующей эквивалентной фразой «меньше любого наперед заданного положительного числа». Получается как бы некоторая игра: кто-то (один игрок) задает произвольное положительное число (для него установилось обозначение ε), а другой игрок добивается, чтобы величина $|a_n - a|$ была меньше этого числа начиная с некоторого номера N. Если число a действительно является пределом последовательности, то этого добиться можно. Для этого нужно указать такой номер N, начиная с которого все члены отстоят от предела не более чем на заданное число ε.

Пусть, например, мы хотим доказать, что предел последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n}$, равен нулю, и нам задали $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Тогда в качестве N можно выбрать, например, число 10, так как при $n > 10$ будет $\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$. Если же нам зададут число ε поменьше, скажем $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то придется в качестве N выбрать число побольше, например $N = 100$ (или больше). Число N выбирается так, чтобы все члены последовательности начиная с номера $N + 1$ заведомо оказались в интервале $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Если a не является пределом, то такого номера подобрать не удастся — всегда найдется какой-нибудь член последовательности с достаточно большим номером, который будет удален от a на расстояние, большее заданного числа. Итак, строгое определение предела имеет следующий вид.

Определение 1.9. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Употребляют следующее выражение: «Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a» и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

В символьном виде это определение можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

О последовательности, имеющей предел, говорят, что она *сходится*, а о последовательности, не имеющей предела, говорят, что она *расходится*, или что она *не сходится*.

Как ясно из определения предела, он не зависит от любого количества k первых членов последовательности, поскольку число N всегда может быть выбрано бо́льшим, чем k.

Как найти предел последовательности, мы поговорим позже, для этого существуют определенные приемы. Обсудим сейчас другой вопрос: как обосновать (доказать), что такое-то конкретное число a является пределом последовательности $\{a_n\}$?

Очевидно, для обоснования нужно показать, что данное число a удовлетворяет определению предела. Как уже говорилось, приведенное определение очень напоминает игру. Продолжим эту аналогию. Пусть первый игрок пытается доказать, что некоторое число есть предел данной последовательности, а другой оппонирует ему.

Ход 1. Первый игрок называет число a, про которое он утверждает, что оно является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Ход 2. Второй игрок задает число ε. При этом он, конечно, пытается задать как можно меньшее (положительное) число, поскольку тогда труднее сделать так, чтобы выполнялось неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно больших n. Действительно, если это неравенство выполняется для какого-то числа ε, то оно и подавно будет выполняться для любого большего числа ε. Однако самого маленького положительного числа не существует, поэтому второму игроку дается право делать много попыток (поскольку нужно доказать неравенство для всех положительных чисел ε).

Ход 3. Первый игрок называет число N, такое что для всех членов последовательности с бо́льшими номерами должно выполняться неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Затем игра повторяется (бесконечное число раз) со второго хода, когда второй игрок задает новое (меньшее) значение ε.

Приведенная интерпретация определения предела дает лишь его логическую схему. Естественно, доказывать, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, буквально по такой схеме нельзя, поскольку она предполагает бесконечное множество циклов (повторений). Однако в принципе доказательство ведется именно по такой схеме. Только тот, кто доказывает, сам задает ε, но не в виде конкретного числа, а в общем (буквенном) виде. Последнее делается для того, чтобы избежать бесконечного числа циклов. При этом приходится таким образом подбирать число N, ориентируясь на особенности последовательности, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Обычно N оказывается зависящим от ε, т.е. выражается через него. В простейших случаях, например если последовательность монотонная, для нахождения N достаточно решить неравенство $|a_N - a| < \varepsilon$.

Пример 1.18

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n} = \frac{2}{5}$.

Решение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем такое натуральное число N, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{2n-3}{5n} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon.$$

Для этого решим данное неравенство. Произведем преобразования внутри модуля — приведем дроби к общему знаменателю и сделаем упрощения:

$$\left|\frac{2n-3}{5n} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2n-3-2n}{5n}\right| = \left|-\frac{3}{5n}\right| = \frac{3}{5n}.$$

Исходное неравенство равносильно следующему: $\frac{3}{5n} < \varepsilon$, откуда получаем $n > \frac{3}{5\varepsilon}$. Таким образом, достаточно взять $N = \left[\frac{3}{5\varepsilon}\right] + 1$[1], и неравенство $\left|\frac{2n-3}{5n} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon$ будет выполнено для любого $n > N$.

[1] Напомним, что квадратными скобками обозначается целая часть числа — наибольшее целое число, не превосходящее данное, например: $\left[2\frac{3}{5}\right] = 2$, $\left[-2\frac{3}{5}\right] = -3$.

Приведенный выше способ подбора числа N представляет «кухню» математика. Для доказательства совершенно не важно, как мы его отыскали. Формальное же доказательство выглядит следующим образом.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем $N = \left[\dfrac{3}{5\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $n > N$ справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\left|\frac{2n-3}{5n} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2n-3-2n}{5n}\right| = \left|-\frac{3}{5n}\right| = \frac{3}{5n} < \frac{3}{5N} \leq \frac{3}{5\left(\left[\dfrac{3}{5\varepsilon}\right]+1\right)} \leq \frac{3}{5\left(\dfrac{3}{5\varepsilon}\right)} = \varepsilon,$$

т.е. $\left|\dfrac{2n-3}{5n} - \dfrac{2}{5}\right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Определение предела можно интерпретировать геометрически. Неравенство (1.2) равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Последнее двойное неравенство показывает, что все члены последовательности с номерами $n > N$, т.е. $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ попадают в интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, который называется ε-*окрестностью точки* a (рис. 1.11).

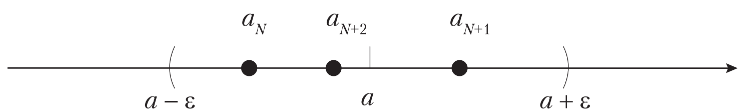


Рис. 1.11. **ε-окрестность точки a**

Таким образом, число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, если и только если все члены данной последовательности, кроме конечного их числа, попадают в сколь угодно малую окрестность точки a.

Очевидно, что значение предела не изменится, если изменить конечное число членов последовательности, а также если удалить несколько ее членов. Короче говоря, предел не зависит от любого конечного числа членов последовательности. В частности, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$, где k — произвольное натуральное число.

Из примера 1.18 очевидно, что число N, фигурирующее в определении предела, вообще говоря, зависит от ε. Обычно чем меньшее значение ε нам задано, тем большее значение N приходится подбирать для выполнения неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Если изображать члены последовательности на координатной плоскости, то это означает, что чем меньше ε-коридор вокруг значения a, тем начиная с большего номера члены последовательности в него попадают (рис. 1.12).

Итак, мы рассмотрели вопрос о том, как доказывать, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$. Зададимся теперь вопросом: как доказать отрицание этого утверждения, а именно: «число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$», а также утверждение, что последовательность вовсе не имеет никакого предела? Давайте сначала дадим соответствующие определения, основываясь на определении 1.9. Для этого нужно все слова типа «для любого» заменить на слова «существует» или «найдется» и наоборот, а знак неравенства заменить на его отрицание: вместо знака < написать знак ≥. Преобразовав соответствующим образом формулу (1.3), получим (черта сверху означает отрицание)

$$\overline{\lim_{n\to\infty} a_n = a} \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon .$$

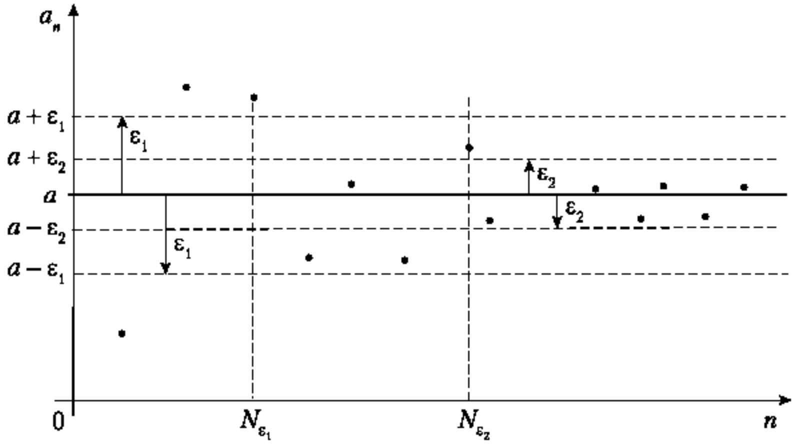


Рис. 1.12. **К зависимости числа *N* от ε**

В словесной форме это определение выглядит следующим образом.

Определение 1.10. Число *a* ***не является пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если существует такое положительное число ε, что для любого натурального числа N найдется номер $n > N$, для которого будет выполняться неравенство $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Приведенное определение допускает два случая: 1) последовательность имеет предел, но он не равен a, и 2) последовательность не имеет предела. Какой из этих случаев имеет место в действительности, данное определение не устанавливает. Дадим теперь определение отсутствия предела.

Определение 1.11. Последовательность $\{a_n\}$ ***не имеет предела*** (расходится), если для любого числа a существует такое положительное число ε, что для любого натурального числа N найдется номер $n > N$, для которого будет выполняться неравенство $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

По сути, в определении 11 утверждается, что никакое число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Пример 1.19

Докажем, что число 1 не является пределом последовательности $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n}$.

Решение. В соответствии с определением 1.10 достаточно указать такое $\varepsilon > 0$, что для достаточно больших n будет выполняться неравенство $\left|\frac{1}{n} - 1\right| \geq \varepsilon$. Итак, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда для всех $n \geq 2$ будем иметь: $\left|\frac{1}{n} - 1\right| = 1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 1.20

Докажем, что последовательность $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n$, не имеет предела.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) $a = 1$ и 2) $a \neq 1$, и покажем, что ни одно из чисел a не является пределом последовательности.

1) Пусть $a = 1$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда какое бы число N нам ни задали, всегда найдется нечетное число $n > N$, так что $a_n = (-1)^n = -1$, а значит

$$|a_n - a| = |-1-1| = 2 \geq \varepsilon.$$

2) Пусть $a \neq 1$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|1-a|}{2}$. Тогда какое бы число N нам ни задали, всегда найдется четное число $n > N$, так что $a_n = (-1)^n = 1$, а значит

$$|a_n - a| = |1-a| = 2\frac{|1-a|}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon.$$

1.3.2. Свойства предела последовательности

Интуитивно ясно, что последовательность не может иметь более одного предела. И действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.*

Доказательство. Доказательство будем вести от противного, т.е. предположим, что последовательность $\{a_n\}$ имеет более одного предела, и придем к противоречию. Обозначим два разных предела через a и b, $a \neq b$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$. Тогда все члены последовательности, кроме нескольких первых членов, содержатся в ε-окрестности числа a и в ε-окрестности числа b одновременно. Но поскольку при выбранном ε эти окрестности не пересекаются, то такое невозможно.

Облечем приведенное выше рассуждение в строгую форму доказательства.

По определению предела существуют такие натуральные числа N_1 и N_2, что $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ для всех $n > N_1$ и $|a_n - b| < \varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ для всех $n > N_2$.

Возьмем такой номер n_0 последовательности, который больше обоих чисел N_1 и N_2. Тогда для него будут выполнены приведенные выше неравенства. Следовательно,

$$|a-b| = |a - a_{n_0} + a_{n_0} - b| \leq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - b| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

т.е. мы получили противоречие: $|a-b| < |a-b|$.

Тем самым утверждение доказано. ■

Очевидно, что если последовательность является возрастающей (или неубывающей), то она ограничена снизу, а если последовательность является убывающей (или невозрастающей), то она ограничена сверху.

Определение 1.12. Последовательность $\{a_{n_k}, k = 1, 2, 3, ...\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n, n = 1, 2, 3, ...\}$, если n_k — возрастающая последовательность натуральных чисел: $n_1 < n_2 < n_3 < ...$.

Иными словами, подпоследовательность состоит из некоторых членов последовательности, расположенных в том же порядке, например из четных, нечетных членов или членов, выбранных по произвольному правилу, однако относительное расположение членов (какой раньше, а какой позже) сохраняется.

Теорема 1.2. *Если последовательность* $\{a_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ *сходится*: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *то и любая ее подпоследовательность* $\{a_{n_k}, k = 1, 2, 3, ...\}$ *сходится к тому же пределу*: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Доказательство. Пусть $\{a_{n_k}, k = 1, 2, 3, ...\}$ — подпоследовательность последовательности $\{a_n, n = 1, 2, 3, ...\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и задано $\varepsilon > 0$.

Нужно доказать, что существует такое натуральное число N, что для любого $k > N$ будет выполняться неравенство $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, существует такое натуральное число N_1, что при любом $n > N_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. А значит, для любых $n_k > N_1$ выполняется неравенство $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Возьмем в качестве числа N минимальное из чисел k, для которых выполняется неравенство $n_k > N_1$. Тогда, по определению подпоследовательности, для $k > N$ оно и подавно будет выполняться. А это значит, что при всех $k > N$ будет выполняться неравенство $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Из этой теоремы следует, что если какая-то подпоследовательность расходится, то расходится и сама последовательность.

Обратное неверно: если некоторая подпоследовательность сходится, то это еще не означает, что и вся последовательность сходится. Так, последовательность $a_n = (-1)^n$ расходится, хотя, например, подпоследовательность с четными номерами 1, 1, 1, ... сходится.

Теорема 1.3. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится, причем* $a_n \le c$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le c$.

Доказательство. Предположим противное, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > c$. Но тогда, взяв $\varepsilon = a - c$, получим, что в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ нет ни одного члена последовательности, что противоречит определению предела. ■

Теорема 1.4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = d$ *и* $a_n < c_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = d$.

Эту теорему в шутку называют теоремой о двух милиционерах (полицейских): если два полицейских ведут преступника, взяв его под руку слева и справа, причем оба полицейских приходят в участок, то и преступник тоже попадает в участок.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = d$ и $a_n < c_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$. И пусть задано число $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела существуют такие числа N_1 и N_2, что для любого $n > N_1$ будет $|a_n - d| < \varepsilon$ и для любого $n > N_2$ будет

$|b_n - d| < \varepsilon$. Очевидно, эти неравенства будут выполняться и для большего из N_1 и N_2: $N = \max\{N_1, N_2\}$. Из сказанного следует, что для любого $n > N$ будут выполняться неравенства

$$d - \varepsilon < a_n < d + \varepsilon \text{ и } d - \varepsilon < b_n < d + \varepsilon.$$

Таким образом, с учетом неравенств $a_n < c_n < b_n$ для $n > N$ будем иметь

$$d - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < d + \varepsilon,$$

откуда следует неравенство $|c_n - d| < \varepsilon$, что и означает утверждение теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = d$. ■

Теорема 1.5. *Если последовательность является неубывающей (невозрастающей) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.*

Эта теорема именуется обычно теоремой Вейерштрасса или Больцано — Вейерштрасса. Ее доказательство было получено в XIX в. чешским математиком Бернардо Больцано, а также немецким математиком Карлом Вейерштрассом. Доказательство можно найти в книге [3].

Отметим следующее. Данная теорема дает достаточное условие существования нредела. Из двух фигурирующих в этой теореме условий (ограниченность и монотонность) первое (ограниченность) является необходимым, т.е. если оно не выполняется, то предела быть не может, а второе (монотонность) — не является, т.е. существуют примеры, когда последовательность не монотонна, но предел тем не менее существует.

То, что ограниченность является необходимым условием, довольно очевидно. Действительно, неограниченность означает, что члены последовательности могут принимать сколь угодно большие значения. А это означает, что все члены последовательности начиная с некоторого номера не могут располагаться в ε-окрестности некоторой точки числовой оси.

Примером же немонотонной последовательности, имеющей предел, может служить уже рассматривавшаяся нами последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Пример 1.21

Докажем, что последовательность $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ имеет предел.

Решение. Докажем, что последовательность $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ начиная с некоторого номера убывает и ограничена снизу. И тогда по теореме Больцано — Вейерштрасса она сходится.

То, что последовательность ограничена снизу, очевидно, поскольку $a_n = \dfrac{n^2}{2^n} > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Начиная с номера $n = 3$ она монотонна. Действительно,

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \le a_n = \frac{n^2}{2^n} \Leftrightarrow (n+1)^2 \le 2n^2 \Leftrightarrow n+1 \le n\sqrt{2} \Leftrightarrow n \ge \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow n \ge 3.$$

1.3.3. Арифметические операции над пределами

В математике теорию, в том числе и доказательство теорем, можно строить по-разному: можно доказывать каждую теорему как отдельную, изолированную от других теорем, основываясь только на определениях, а можно ввести некоторый общий механизм, облегчающий и упрощающий доказательство ряда теорем. Таким упрощающим механизмом в теории пределов является введение понятия бесконечно малой величины, которое имеет и самостоятельное значение.

Определение 1.13. Назовем общий член последовательности $\{a_n\}$, т.е. переменную a_n, ***бесконечно малой величиной***, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Примерами бесконечно малых величин являются переменные $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и т.д.

Из определения бесконечно малой величины непосредственно вытекают следующие леммы.

Лемма 1.1. Для того чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы переменная $x_n = a_n - a$ была бесконечно малой величиной.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, по определению предела существует такое натуральное N, что для любого $n > N$ будет выполняться неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, а значит, и $|x_n| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, следовательно, x_n — бесконечно малая величина.

Достаточность. Пусть x_n — бесконечно малая величина. Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из определения бесконечно малой величины следует существование такого натурального N, при котором для любого $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, а значит, и $|a_n - a| < \varepsilon$, откуда по определению предела следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Таким образом, для того чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = a + x_n$, где x_n — некоторая бесконечно малая величина.

Лемма 1.2. Сумма двух бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной.

Доказательство. Пусть α_n и β_n — две бесконечно малые величины, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По определению предела требуется доказать существование такого натурального N, при котором для любого $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, существует такое N_1, что для любого $n > N_1$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, существует такое N_2, что для любого $n > N_2$ выполняется неравенство $|\beta_n| < \varepsilon_1$.

Но тогда для любого $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ будут выполняться оба неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon_1$ и $|\beta_n| < \varepsilon_1$ и, таким образом, $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$, т.е. $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0$. ■

Лемма 1.3. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n является бесконечно малой величиной.

Доказательство. Пусть для всех натуральных значений n выполняется неравенство $|x_n| \le M$. И пусть задано $\varepsilon > 0$. Если $M = 0$, утверждение очевидно. Если $M > 0$, возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, найдется такое N, что для любого $n > N$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon_1$, а значит, $|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M\varepsilon_1 = \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \alpha_n) = 0$. ■

Теорема 1.6. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то*:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$

(*предел суммы, разности, произведения равен сумме, разности, произведению пределов соответственно*).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. По лемме 1.1 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — две бесконечно малые величины.

1. Тогда $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$, где $(\alpha_n + \beta_n)$ — бесконечно малая величина (по лемме 1.2). Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

2. Тогда $x_n - y_n = a + \alpha_n - b - \beta_n = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n)$, где $(\alpha_n - \beta_n) = [\alpha_n + (-1) \cdot \beta_n]$ — бесконечно малая величина (по леммам 1.2 и 1.3). Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

3. Тогда $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, где выражение в скобках в силу лемм 1.2 и 1.3 — бесконечно малая величина. Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$. ■

Теорема 1.7. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

(*предел частного равен частному пределов*).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$.

Поскольку $b \neq 0$, начиная с некоторого номера будет выполняться неравенство $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$. Действительно, если положить $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$, то, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, начиная с некоторого номера должно выполняться неравенство $|y_n - b| < \varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$, откуда следует $b - \dfrac{|b|}{2} < y_n < b + \dfrac{|b|}{2}$ и $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$. Поскольку предел не зависит от конечного числа первых членов, ограничимся теми значениями n, для которых это неравенство выполняется.

По лемме 1.1 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — две бесконечно малые величины.

Преобразуем разность:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{by_n} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках в силу лемм 1.2 и 1.3 является бесконечно малой величиной, а множитель $\dfrac{1}{by_n}$ в силу сказанного выше — ограниченной переменной: $\left|\dfrac{1}{by_n}\right| < \dfrac{2}{b^2}$. Следовательно, по лемме 1.3 разность $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$ является бесконечно малой величиной, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$. ■

Замечание 1.9. Требование сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не излишне, поскольку возможны случаи, когда сумма (разность, произведение, частное) имеет предел, а исходные последовательности предела не имеют. Возьмем, например, $x_n = n$, $y_n = \dfrac{1}{n} - n$. Очевидно, каждая из этих последовательностей расходится, однако их сумма $z_n = x_n + y_n = n + \dfrac{1}{n} - n = \dfrac{1}{n}$ сходится.

Теорема 1.8. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $c \in \mathbb{R}$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По лемме 1.1 $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая величина. Тогда $c \cdot x_n = c(a + \alpha_n) = ca + c\alpha_n$, где $c\alpha_n$ в силу леммы 1.3 — бесконечно малая величина. Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = ca$. ■

Пример 1.22

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5 + 3/n - 1/n^2}{10 - 4/n} + 2\right)$.

Решение. На основании теорем 1.1—1.4 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5 + 3/n - 1/n^2}{10 - 4/n} + 2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5 + 3/n - 1/n^2}{10 - 4/n} + \lim_{n\to\infty} 2 = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5 + 3/n - 1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(10 - 4/n)} + 2 =$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}{}^{3}\!/_{n}-\lim\limits_{n\to\infty}{}^{1}\!/_{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}10-\lim\limits_{n\to\infty}{}^{4}\!/_{n}}+2=\frac{5+3\lim\limits_{n\to\infty}{}^{1}\!/_{n}-(\lim\limits_{n\to\infty}{}^{1}\!/_{n})(\lim\limits_{n\to\infty}{}^{1}\!/_{n})}{10-4\lim\limits_{n\to\infty}{}^{1}\!/_{n}}+2=\frac{5+3\cdot0-0\cdot0}{10-4\cdot0}+2=2{,}5.$$

1.3.4. Техника вычисления пределов дробно-рациональных выражений

Рассмотрим технику вычисления на примерах.

Пример 1.23

Вычислим предел последовательности $a_n=\dfrac{2n^2+3n-5}{5n^2-1}$.

Решение. Данное выражение является дробно-рациональным, поскольку числитель и знаменатель дроби представляют собой многочлены от переменной n. Так как числитель и знаменатель представляют собой неограниченные последовательности и, следовательно, пределов не имеют, то непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя. В таких случаях применяется следующая техника вычисления пределов. Разделим и числитель, и знаменатель почленно на переменную n в наивысшей степени, в которой она входит в данную дробь (в данном случае делим на n^2):

$$a_n=\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{5n^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{5-\dfrac{1}{n^2}}.$$

Теперь каждое слагаемое и числителя, и знаменателя представляет собой монотонную ограниченную последовательность, а значит, имеет предел. Таким образом, теперь можно воспользоваться приведенными выше теоремами:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{5-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2+0-0}{5-0}=\frac{2}{5}.$$

Пример 1.24

Вычислим предел последовательности $a_n=\dfrac{n^2+2n+1}{3n^3+2n+1}$.

Решение. Используем описанный метод:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^3+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{3+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{3+0+0}=0.$$

Как мы увидели в примерах, если степени многочленов числителя и знаменателя одинаковы, то последовательность имеет предел, отличный от нуля. Он равен отношению коэффициентов при старших членах. Если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, то предел такой последовательности равен нулю. Если же степень многочлена, стоящего в числителе, больше, чем степень многочлена знаменателя, то такая последовательность является неограниченной и, значит, расходящейся.

1.3.5*. Техника вычисления пределов выражений, содержащих радикалы

Дробные выражения, содержащие радикалы

Идеи предыдущего параграфа можно использовать и в некоторых случаях для вычисления пределов дробных выражений, содержащих радикалы.

Пример 1.25

Вычислим предел последовательности $a_n = \dfrac{2n\sqrt[4]{n} - 3n + \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n\sqrt{n^3}} + 2n - \sqrt[4]{n+2} - 3}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt[4]{n} - 3n + \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n\sqrt{n^3}} + 2n - \sqrt[4]{n+2} - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/4} - 3n + n^{1/2} - 1}{n^{5/4} + 2n - (n+2)^{1/4} - 3}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $n^{5/4}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/4} - 3n + n^{1/2} - 1}{n^{5/4} + 2n - (n+2)^{1/4} - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3n^{-1/4} + n^{-3/4} - n^{-5/4}}{1 + 2n^{-1/4} - \left(\dfrac{n+2}{n^5}\right)^{1/4} - 3n^{-5/4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3n^{-1/4} + n^{-3/4} - n^{-5/4}}{1 + 2n^{-1/4} - \left(\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{2}{n^5}\right)^{1/4} - 3n^{-5/4}} = 2.$$

Пример 1.26

Вычислим предел последовательности $a_n = \dfrac{2n\sqrt[4]{n+2} + 3\sqrt{n - \sqrt{n}} + 1}{2n - 3\sqrt{n\sqrt{n^3} + 2n + 1} - 1}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt[4]{n+2} + 3\sqrt{n - \sqrt{n}} + 1}{2n - 3\sqrt{n\sqrt{n^3} + 2n + 1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/4} \cdot \sqrt[4]{1 + 2n^{-1}} + 3n^{1/2} \cdot \sqrt{1 - n^{-1/2}} + 1}{2n - 3n^{5/4} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + 2n^{-2} + n^{-3}} - n^{-5/2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/4} \cdot (2\sqrt[4]{1 + 2n^{-1}} + 3n^{-3/4} \cdot \sqrt{1 - n^{-1/2}} + n^{-5/4})}{n^{5/4} \cdot (2n^{-1/4} - 3\sqrt{\sqrt{1 + 2n^{-2} + n^{-3}} - n^{-5/2}})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[4]{1 + 2n^{-1}} + 3n^{-3/4} \cdot \sqrt{1 - n^{-1/2}} + n^{-5/4}}{2n^{-1/4} - 3\sqrt{\sqrt{1 + 2n^{-2} + n^{-3}} - n^{-5/2}}} = -\frac{2}{3}.$$

Разность квадратных корней от многочленов одинаковых степеней с равными старшими коэффициентами

При вычислении указанных пределов применяется прием умножения (и деления) на так называемое сопряженное выражение, т.е. на сумму таких же корней. Затем числитель преобразуется по формуле разности квадратов, после чего производится почленное деление числителя и знаменателя на переменную n в наивысшей степени, в которой она входит в числитель дроби.

Пример 1.27

Вычислим предел последовательности $a_n = \sqrt{n^2+2n-3} - \sqrt{n^2-n+2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-3} - \sqrt{n^2-n+2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-3} - \sqrt{n^2-n+2})(\sqrt{n^2+2n-3} + \sqrt{n^2-n+2})}{\sqrt{n^2+2n-3} + \sqrt{n^2-n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n-3)-(n^2-n+2)}{\sqrt{n^2+2n-3} + \sqrt{n^2-n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{\sqrt{n^2+2n-3} + \sqrt{n^2-n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} + \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2}.$$

Пример 1.28

Вычислим предел последовательности $a_n = \sqrt{3n^3+2n^2-1} - \sqrt{3n^3-n+2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^3+2n^2-1} - \sqrt{3n^3-n+2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n^3+2n^2-1} - \sqrt{3n^3-n+2})(\sqrt{3n^3+2n^2-1} + \sqrt{3n^3-n+2})}{\sqrt{3n^3+2n^2-1} + \sqrt{3n^3-n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^3+2n^2-1)-(3n^3-n+2)}{\sqrt{3n^3+2n^2-1} + \sqrt{3n^3-n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{\sqrt{3n^3+2n^2-1} + \sqrt{3n^3-n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^4}} + \sqrt{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}}.$$

Как мы видим, при $n\to\infty$ числитель стремится к двум, а знаменатель — к нулю. Значит, предела (конечного) не существует.

Разность кубических корней от многочленов одинаковых степеней с равными старшими коэффициентами

При вычислении указанных пределов применяется прием умножения (и деления) на неполный квадрат суммы таких же корней. Затем числитель преобразуется по формуле разности кубов, после чего производится почленное деление числителя и знаменателя на переменную n в наивысшей степени, в которой она входит в числитель дроби.

Пример 1.29

Вычислим предел последовательности $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-2})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-2})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{(n-2)^2})}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n-2)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}=0.$$

Пример 1.30

Вычислим предел последовательности $a_n=\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2+2})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2+2})(\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+\sqrt[3]{(n^3-2n^2+2)^2})}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+\sqrt[3]{(n^3-2n^2+2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+n^2+1)-(n^3-2n^2+2)}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+\sqrt[3]{(n^3-2n^2+2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot\sqrt[3]{n^3-2n^2+2}+\sqrt[3]{(n^3-2n^2+2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)^2}}=1.$$

1.3.6. Число *e*

Рассмотрим числовую последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$. Докажем, что данная последовательность: а) возрастает и б) ограничена сверху. Тогда по теореме Больцано — Вейерштрасса (теорема 1.5) можно заключить, что она имеет предел. Это так называемый ***второй замечательный предел***[1]. ***Он обозначается буквой e***:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Это число иррациональное, и его значение равно 2,718282... . Число e широко используется в качестве основания показательных и логарифми-

[1] О первом замечательном пределе см. в гл. 2.

ческих функций, применяемых для моделирования физических, экономических, социальных и других процессов.

Доказательство. а) Докажем, что $x_n < x_{n+1}$. Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right); \quad (1.4)$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k =$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right). \quad (1.5)$$

Сравним суммы (1.4) и (1.5). Каждая скобка в сумме (1.5) превышает соответствующую скобку в сумме (1.4): $\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n+1}\right) > \left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... Кроме того, в сумме (1.5) содержится на одно слагаемое больше. Следовательно, $x_{n+1} > x_n$.

б) Докажем ограниченность сверху последовательности x_n. Из формулы (1.4) следует, что

$$x_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Но поскольку $k! \ge 2^{k-1}$ (докажите!), то $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ и

$$x_n \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1+2=3.$$

Тем самым утверждение о существовании предела $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ доказано.

Число e имеет определенный экономический смысл. Представим себе банк, который предлагает депозит под 100% годовых.

Положив под эти проценты сумму S, при условии ежегодного начисления процентов спустя год инвестор получит $2S$. Если же проценты начисляются ежемесячно и приплюсовываются к основному вкладу, то через месяц накопленная сумма будет равна $S\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)$, через два месяца — $S\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$, а в конце года — $S\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ (формула сложных процентов). При ежедневном пересчете процентов сумма станет равной $S\cdot\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$.

Очевидно, что при «ежемгновенном» пересчете процентов надо в формуле $S \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда получим в конце года сумму Se. Таким образом, *e — это сумма, полученная через 1 год от вклада в 1 рубль с депозита под 100% годовых при «ежемгновенном» пересчете процентов.*

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Может ли какой-нибудь член последовательности быть равен ее пределу?
2. Могут ли члены одной подпоследовательности быть всегда меньше предела всей последовательности, а другой ее подпоследовательности — больше?
3. Может ли последовательность иметь предел, если какая-то из подпоследовательностей расходится?
4. Сохранится ли понятие предела последовательности, если в его определении слова «для любого ε» заменить словами «существует ε»? Если нет, то какое свойство последовательности измененное определение будет описывать?
5. Сохранится ли понятие предела последовательности, если в его определении неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ заменить на нестрогое?
6. Поясните, почему в определении предела требуется, чтобы значение ε было положительным.
7. Сохранится ли понятие предела последовательности, если в его определении слова «при всех $n > N$» заменить словами «найдется $n > N$»?
8. Что можно сказать о пределе последовательности, если все ее члены меньше некоторого числа M?
9. Что можно сказать о пределе невозрастающей последовательности, если все ее члены больше некоторого числа M?
10. Могут ли две подпоследовательности одной и той же последовательности иметь различные пределы?
11. Что будет с пределом последовательности, если из нее: а) исключить 100 первых членов; б) добавить 100 членов в произвольные места; в) переставить местами 100 членов?
12. Будет ли неубывающая последовательность иметь предел, если она ограничена сверху?
13. Верно ли, что если $a_n < c$ для любого $n > N$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < c$?
14. Всегда ли существует предел: а) произведения; б) частного двух бесконечно малых? Если существует, то чему он равен?
15. Приведите примеры, когда пределы суммы, разности, произведения, частного не равны соответственно сумме, разности, произведению, частному пределов.
16. Всегда ли можно выносить константу за знак предела?

Упражнения

1.27. Докажите, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$.

1.28. Найдите наименьшее натуральное число N, такое что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|a_n - 1\right| < 0{,}001$, где $a_n = \frac{n+1}{n}$.

1.29. Найдите пределы последовательностей: а) $a_n = \frac{1-n}{n}$; б) $a_n = \frac{\sin n}{n}$.

1.30. Докажите, что число 1 не является пределом последовательности $a_n = \frac{n+2}{2n}$.

1.31. Докажите, что последовательность $a_n = \frac{n^2+1}{2n}$ расходится.

1.32. С помощью теоремы Больцано — Вейерштрасса (теорема 1.5) докажите, что последовательность $\{q^n\}$ сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|>1$.

1.33. Найдите предел последовательности $\{q^n\}$ при $|q|<1$.

1.34. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$. Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+y_n)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n-2y_n)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n\cdot y_n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7x_n}{y_n}+3\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n^5+2y_n^2-1)$.

1.35. Найдите: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+1/n-2/n^2}{2-3/n}-1\right)$.

1.36. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$.

1.37*. Докажите, что существуют следующие пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n, например $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

1.38. Вычислите пределы (если они существуют):

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n^4-5}{n^4+2n^3-3n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3-n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(2-n)-5}{3n^2+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\cdot\frac{3n^2+1}{n^2+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n^3-5}{n^4+2n^3-3n^2+1}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3+2}\cdot\frac{n^3-n-1}{n+3}\right)$; ж)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n\sqrt{n}+3n^2\sqrt[3]{1+27n}}{2n^2+n\sqrt{n\sqrt[3]{1+n^5}}}$;

з)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n\sqrt{n^3+1}+3n\sqrt[3]{1+2n}-3}{2n-n^2\sqrt{3+4n}}$; и)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2-8n-1}-\sqrt{2n^2+n+2})$;

к)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{5n^3+2n-1}-\sqrt{5n^3-n+3})$; л)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^4+7n^2-2}-\sqrt{2n^4-n+1})$;

м)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+2n^2-n})$.

1.4. Числовые ряды

1.4.1. Определение числового ряда

Мы уже столкнулись с числовым рядом в параграфе 1.1, когда подсчитывали длину пути, прошедшего черепахой, а также величину затраченного времени на соревнование. Понятие числового ряда родственно понятию последовательности.

Определение 1.14. Для заданной числовой последовательности $\{a_n\}$ выражение

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

называется *числовым рядом*, а a_n — n-м членом этого ряда.

Определение 1.15. Сумма n первых членов ряда называется *n-й частичной (частной) суммой* этого ряда и обозначается через S_n:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

С понятием числового ряда связано два вида последовательностей:

1) исходная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, состоящая из членов ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (разделительный знак «,» между членами последовательности заменяется на знак «+» между членами ряда);

2) последовательность частных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$, из которой легко восстанавливается исходная последовательность:

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, a_3 = S_3 - S_2, \ldots, a_n = S_n - S_{n-1}, \ldots .$$

Определение 1.16. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$ частных сумм ряда, то говорят, что этот ряд сходится, а указанный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда*. Если предел частных сумм не существует, то говорят, что ряд расходится.

Часто для обозначения суммы ряда используется запись вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 1.9. *Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то его n-й член стремится к нулю*: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Обратное неверно: если n-й член стремится к нулю, то вовсе не обязательно ряд сходится (см. пример 1.34).

Пример 1.31

Исследуем на сходимость ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$.

Решение. Рассмотрим n-ю частную сумму ряда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Заметим, что $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Используя это равенство, преобразуем члены нашего ряда и произведем упрощения:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1$.

Таким образом, ряд сходится, и сумма его равна единице.

Пример 1.32

Исследуем на сходимость ряд $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}+...$.

Решение. Очевидно, что n-й член ряда не стремится к нулю (он стремится к бесконечности). Поэтому можно сделать вывод о том, что ряд расходится.

Пример 1.33

Исследуем на сходимость ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$.

Решение. Очевидно, что n-й член ряда не стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Поэтому можно сделать вывод о том, что ряд расходится.

Пример 1.34

Исследуем на сходимость ряд[1] $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$.

Решение. Очевидно, что n-й член ряда стремится к нулю. Однако это не гарантирует сходимость ряда. На самом деле этот ряд расходится. Покажем это. Для этого рассмотрим частные суммы вида $S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$. Заменим значение этого выражения на меньшее. Очевидно, что если последовательность с меньшими (положительными) членами будет расходиться, то и исходная последовательность будет расходиться. Итак,

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)}_{8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+...+\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}}_{n\cdot\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot n.$$

Таким образом, $S_{2^n}>1+\frac{1}{2}n$. А это означает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}n\right)$ не существует, т.е. ряд расходится.

Для установления сходимости ряда имеет место следующая полезная теорема о мажорирующем ряде.

Теорема 1.10. *Если* $0\le a_n\le b_n$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится, а если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *расходится.*

[1] Этот ряд называется гармоническим рядом.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Поскольку члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, последовательность его частных сумм $\{S_n\}$ является неубывающей.

Ввиду неравенств $a_n \le b_n$ имеем $S_n \le S_n'$, где S_n' — частная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. По свойству предела последовательности отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ ограничена.

Таким образом, последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является неубывающей и ограничена сверху. По теореме Больцано — Вейерштрасса (теорема 1.5) отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Вторую часть теоремы докажем методом от противного. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Но по доказанному выше из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит предположению. ■

Пример 1.35

Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6n^2-5}$ сходится, если известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Решение. При $n \ge 3$ имеет место неравенство $\frac{5}{6n^2-5} \le \frac{1}{n^2}$. Действительно, для $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{5}{6n^2-5} \le \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow 5n^2 \le 6n^2 - 5 \Leftrightarrow n^2 \ge 5 \Leftrightarrow n \ge 3.$$

Поскольку на сходимость ряда не влияют несколько первых членов, то на основании теоремы 1.10 и предположения о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ можно заключить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6n^2-5}$ сходится.

1.4.2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Вы уже встречались с геометрической прогрессией. Как вы помните, геометрической прогрессией называется последовательность $\{b_n\}$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $b_1 \ne 0$; 2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \ne 0$, где q не зависит от n и называется знаменателем геометрической прогрессии.

В упражнениях 1.22, 1.23 было предложено вывести формулы n-го члена прогрессии и суммы ее первых членов при $q \ne 1$:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Сейчас мы будем рассматривать геометрические прогрессии, содержащие бесконечное число членов. В этом случае геометрическая прогрессия представляет собой бесконечную числовую последовательность, а ее сумма — числовой ряд

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

Нас сейчас будет интересовать вопрос о сходимости этого ряда и его сумме. Нетрудно видеть, что если $|q| \geq 1$, то этот ряд расходится, поскольку его n-й член $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ не стремится к нулю ($|b_n| = |b_1 \cdot q^{n-1}| \geq |b_1| \neq 0$). Таким образом, остается рассмотреть вопрос относительно знаменателя, удовлетворяющего условию $0 < |q| < 1$. Оказывается, в этом случае ряд сходится.

Определение 1.17. Геометрическая прогрессия, удовлетворяющая условию $0 < |q| < 1$, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией.*

Замечание 1.10. Такая прогрессия названа бесконечно убывающей, поскольку модули ее членов образуют убывающую последовательность, хотя при $b_1 < 0,\ q > 0$ она возрастает, а при $q < 0$ — знакопеременна.

Теорема 1.11. *Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, т.е. q^n — бесконечно малая величина.*

Доказательство. Если $q = 0$, то утверждение очевидно.

Докажем его для $q > 0$. В этом случае последовательность $\{q^n\}$ ограничена, так как $0 < q^n < 1$, и монотонно убывает, поскольку $q^{n+1} = q^n \cdot q < q^n$. Таким образом, эта последовательность удовлетворяет обоим условиям теоремы Больцано — Вейерштрасса (ограниченность и монотонность). Поэтому она имеет предел, обозначим его через a: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Но так как константу можно выносить за знак предела, то

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q \cdot q^{n-1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = q \cdot a,$$

откуда получаем $a = qa$, или $a(1-q) = 0$. Так как $(1-q) \neq 0$, отсюда получаем $a = 0$.

Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $q > 0$.

Пусть теперь $q < 0$. Тогда будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot |q|^n = 0$, так как произведение ограниченной величины $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ на бесконечно малую ($|q|^n \to 0$) стремится к нулю. ■

Теорема 1.12. *Предел последовательности частных сумм бесконечно убывающей геометрической прогрессии существует и равен $S = \lim\limits_{x\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$.*

Этот предел называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Доказательство. Имеем

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) =$$

$$= \frac{b_1}{1-q} \cdot (\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n) = \frac{b_1}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{b_1}{1-q}. ■$$

Пример 1.36

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{27}; \ldots.$$

Решение. Для этой прогрессии $b_1 = 2$; $q = -\frac{1}{3}$; $|q| < 1$, значит, это бесконечно убывающая прогрессия и ее сумма равна $S = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$.

Пример 1.37

Найдем знаменатель и первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма равна четырем, а сумма квадратов ее членов равна двум.

Решение. Нетрудно видеть, что последовательность, составленная из квадратов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сама будет геометрической прогрессией, знаменатель которой равен квадрату знаменателя исходной прогрессии. Действительно, если знаменатель исходной прогрессии равен q, то $\frac{b_{n+1}^2}{b_n^2} = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^2 = q^2$, причем если $|q| < 1$, то и $|q^2| < 1$. Таким образом, из условий задачи имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 2, \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ b_1^2 = 2(1-q^2), \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 16(1-q)^2 = 2(1-q)(1+q), \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 8(1-q) = (1+q), \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 8-8q = 1+q, \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 9q = 7, \\ |q| \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{9}, \\ q = \frac{7}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $b_1 = \frac{8}{9}$; $q = \frac{7}{9}$.

С помошью формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно преобразовывать бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь. Пусть имеем число, выраженное бесконечной периодической десятичной дробью: $0,(b_1b_2...b_n)$, где $b_1, b_2, ..., b_n$ — десятичные цифры в записи периода. Это число представляет собой бесконечную сумму $\frac{b_1b_2...b_n}{10^n} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{2n}} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{2n}} + \ldots$, являющуюся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{10^n}$. Вычислим эту сумму:

$$S = \frac{b_1b_2...b_n}{10^n} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{2n}} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{3n}} \ldots = b_1b_2...b_n\left(\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} \ldots\right) =$$

$$= b_1b_2...b_n \frac{\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}} = b_1b_2...b_n \frac{1}{10^n - 1} = \frac{b_1b_2...b_n}{\underbrace{99...9}_{n \text{ цифр}}}.$$

Пример 1.38

Преобразуем в обыкновенную дробь число 2,123232323..., или 2,1(23).

Решение. Отделим периодическую часть от остальной части дроби:

$$2{,}1(23)=2{,}1+0{,}0(23)=2{,}1+\frac{1}{10}\cdot 0{,}(23)=\frac{21}{10}+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{21}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{23}{99}=\frac{21\cdot 99+23}{990}=\frac{2102}{990}=\frac{1051}{495}.$$

Для общего случая, когда период дроби может начинаться не сразу после запятой, а дробь иметь ненулевую целую часть, можно вывести общую формулу. Она включает как частный случай и выведенную выше формулу, но несколько сложнее ее.

Пусть имеем число, выраженное бесконечной периодической десятичной дробью: $\underbrace{a_0}_{\text{целая часть}},\underbrace{a_1a_2\ldots a_k}_{k\text{ цифр}}\underbrace{(b_1b_2\ldots b_n)}_{\text{период}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — десятичные цифры в записи дробной части до периода и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — десятичные цифры в записи периода. Это число можно представить в виде

$$\underbrace{a_0}_{\text{целая часть}},\underbrace{a_1a_2\ldots a_k}_{k\text{ цифр}}\underbrace{(b_1b_2\ldots b_n)}_{\text{период}}=a_0a_1a_2\ldots a_k,(b_1b_2\ldots b_n)\cdot 10^{-k}=$$

$$=10^{-k}\cdot\left(a_0a_1a_2\ldots a_k+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n}+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^{2n}}+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^{3n}}+\ldots\right)=$$

$$=10^{-k}\cdot\left(a_0a_1a_2\ldots a_k+\frac{\dfrac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10^n}}\right)=10^{-k}\cdot\left(a_0a_1a_2\ldots a_k+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n-1}\right)=$$

$$=(10^n-1)^{-1}\cdot 10^{-k}\cdot(a_0a_1a_2\ldots a_k\cdot 10^n-a_0a_1a_2\ldots a_k+b_1b_2\ldots b_n)=$$

$$=(10^n-1)^{-1}\cdot 10^{-k}\cdot(a_0a_1a_2\ldots a_k\underbrace{000\ldots 0}_{n\text{ нулей}}-a_0a_1a_2\ldots a_k+b_1b_2\ldots b_n)=$$

$$=\frac{a_0a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_n-a_0a_1a_2\ldots a_k}{(10^n-1)\cdot 10^k}=\frac{a_0a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_n-a_0a_1a_2\ldots a_k}{\underbrace{999\ldots 9}_{n\text{ девяток}}\underbrace{000\ldots 0}_{k\text{ нулей}}}.$$

Итак, формула перевода периодической дроби в обыкновенную выглядит так:

$$\underbrace{a_0}_{\text{целая часть}},\underbrace{a_1a_2\ldots a_k}_{k\text{ цифр}}\underbrace{(b_1b_2\ldots b_n)}_{\text{период}}=\frac{a_0a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_n-a_0a_1a_2\ldots a_k}{\underbrace{999\ldots 9}_{n\text{ девяток}}\underbrace{000\ldots 0}_{k\text{ нулей}}}.$$

Алгоритм перевода следующий. В числителе дроби записывается число, равное разности исходного числа, в котором опущены знаки скобок и десятичная запятая, и часть этого числа до открывающейся скобки — начала периода (десятичная запятая опущена). В знаменателе стоит число, составленное из девяток (их количество равно количеству цифр в периоде) и нулей (их количество равно количеству цифр между десятичной запятой и началом периода). Например:

$$12,\underbrace{345}_{k}\left(\underbrace{6789}_{n}\right)=\frac{123\,456\,789-12345}{\underbrace{9999}_{n}\underbrace{000}_{k}}=\frac{123\,444\,444}{9\,999\,000}=\frac{10\,287\,037}{833\,250}.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что называется числовым рядом, чем он отличается от последовательности?
2. Какие два вида последовательностей ассоциируются с числовым рядом?
3. Укажите, каким образом сходимость ряда сводится к сходимости последовательности.
4. Будет ли ряд сходиться, если его общий член — положительная константа? А будет ли сходиться последовательность с таким общим членом?
5. Верно ли, что если общий член ряда стремится к нулю, то ряд сходится?
6. Какой ряд называется гармоническим? Сходится ли он?
7. Что называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией? Всегда ли последовательность, составленная из ее членов, является убывающей? А из ее частных сумм?
8. Укажите, какие ограничения накладываются на знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
9. Может ли бесконечно убывающая геометрическая прогрессия быть возрастающей? Если да, то при каких условиях?
10. Может ли сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии быть отрицательной; нулевой; положительной? Если да, то при каких условиях?

Упражнения

1.39. Исследуйте на сходимость ряд $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ и найдите его сумму в случае сходимости: а) $a_n=\dfrac{2n^2+3n-5}{5n^2-1}$; б)* $a_n=\dfrac{2}{n^2+3n+2}$; в)* $a_n=\dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

1.40. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.

1.41. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с общим членом $b_n=\dfrac{3}{4^n}$.

1.42. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что второй ее член равен 2, а четвертый равен $\dfrac{1}{2}$.

1.43. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее третий член равен $\dfrac{1}{4}$, а сумма равна $\dfrac{2}{3}$.

1.44. Вычислите сумму $1+\cos^4\dfrac{\pi}{6}+\cos^8\dfrac{\pi}{6}+\cos^{12}\dfrac{\pi}{6}+...+\cos^{4n}\dfrac{\pi}{6}+...$.

1.45. Представьте следующие числа в виде обыкновенной несократимой дроби: а) 0,(123); б) 0,00(34); в) 1,0(12); г) 0,03(25); д) 13,87(4); е) 0,(9).

1.46. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех членов прогрессии равна 12, а сумма квадратов всех членов этой прогрессии равна 6.

1.47. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех членов прогрессии равна 35, а сумма всех членов этой прогрессии с четными номерами равна 10.

1.48. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех членов прогрессии в полтора раза больше суммы всех членов этой прогрессии с нечетными номерами.

1.49. Разность между первым и пятым членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,92, а сумма первого и третьего членов той же прогрессии равна 2,4. Найдите отношение квадрата суммы всех членов этой прогрессии к сумме квадратов членов той же прогрессии.

1.50. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, обладающей следующим свойством: если от ее первого члена отнять $\frac{16}{27}$, то первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а если после этого от третьего члена отнять $\frac{16}{189}$, то снова получится геометрическая прогрессия.

1.51. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих членов как 2 к 3.

1.52. Решите уравнение $x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \ldots = 2x + 1$.

1.53. Имеется бесконечная последовательность вписанных друг в друга квадратов: площадь первого равна единице, вершины каждого последующего делят стороны предыдущего в отношении 1 : 2. Найдите сумму площадей всех квадратов, входящих в эту последовательность.

1.54*. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, причем его сумма меньше 2.

1.5. Определение длины окружности и площади круга

1.5.1. История вопроса

Проблема вычисления длины окружности и площади круга занимала умы математиков и философов с древних времен. Она возникла в связи с необходимостью определения размеров земельных участков круговой формы. Уже в незапамятные времена люди догадывались, что отношение длины окружности к ее диаметру является величиной постоянной. Вопрос о том, что это за величина, решался тогда практическим путем: гибким прутом измерялся диаметр круга, а затем устанавливалось, сколько раз он укладывается на окружности. Всегда получалось, что примерно три раза. Поэтому в древние времена считалось, что отношение длины окружности к диаметру равно трем.

Задача определения площади круга решалась путем построения квадрата, площадь которого равна площади круга. Поэтому проблема получила название квадратуры круга: требовалось найти длину стороны квадрата, площадь которого равна площади круга.

Первые дошедшие до нас упоминания о научном обсуждении проблемы нахождения отношения длины окружности к диаметру и квадратуры круга относятся к XIX в. до н.э. Эти обсуждения происходили между учеными Древнего Египта и Вавилона. Тогда они носили чисто геометрический характер — проблему пытались решить путем построений с помощью циркуля и линейки.

Первое теоретическое обобщение и обоснование методов вычисления площадей и объемов, в которых неявно использовались предельные переходы, было дано величайшим греческим математиком IV в. до н.э. Евдоксом Книдским. Метод Евдокса был назван в XVII в. *методом исчерпывания*. По своей сути он совпадает с современным методом определения длины окружности и площади круга. Он основан на вписывании в круг последовательности правильных многоугольников, причем каждый следующий имеет удвоенное число сторон по сравнению с предыдущим. Доказывается, что разность между площадью круга и площадью многоугольника (члена последовательности) может быть сделана меньше произвольного наперед заданного числа. В указанном способе построения как бы исчерпывается пространство, заключенное между увеличивающимися в размерах вписанными многоугольниками и кругом.

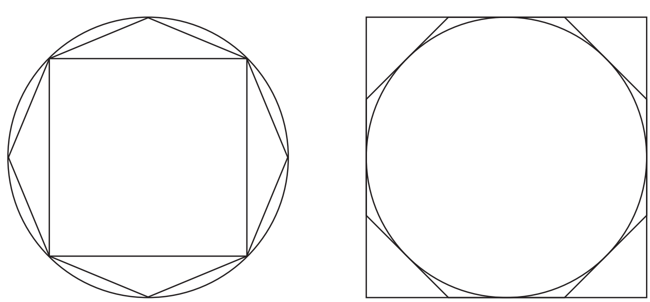
Однако вплоть до конца XIX в. математиками предпринимались попытки решить задачу квадратуры круга путем геометрических построений с помощью циркуля и линейки. Наконец, в 1882 г. немецким математиком Ф. Линдеманом было доказано, что это сделать невозможно.

1.5.2. Определение длины окружности

Из курса планиметрии вам уже известна формула для вычисления длины окружности: $C = 2\pi R$. Однако она была приведена без обоснования, поскольку обоснование существенно опирается на понятие предела, которое тогда еще не было введено. Восполним этот пробел сейчас. Для этого необходимо уточнить, что мы понимаем под длиной окружности.

До сих пор мы умели измерять отрезки прямых линий. Окружность же — кривая линия, и наложением отрезков ее непосредственно измерить нельзя. Нужно искать другой путь. Такой способ измерения открывает нам понятие предела.

Поступим, как поступали в таком случае древние греки. Будем последовательно вписывать в окружность и описывать около нее правильные многоугольники, каждый раз удваивая число сторон (квадрат, восьмиугольник, шестнадцатиугольник и т.д.) (рис. 1.13).



а *б*

Рис. 1.13. **К определению длины окружности**:
а — последовательность вписанных многоугольников;
б — последовательность описанных многоугольников

Из рис. 1.13, *а* очевидно, что периметр каждого следующего вписанного многоугольника больше, чем предыдущего (периметр восьмиугольника больше периметра квадрата и т.д.), поскольку каждая сторона предыдущего многоугольника (отрезок прямой линии) заменяется ломаной линией с теми же концами. Таким образом, периметр вписанного многоугольника возрастает с ростом числа сторон, т.е. образует монотонно возрастающую последовательность. В то же время ясно, что периметр вписанного многоугольника меньше длины окружности, так как каждая его сторона (отрезок прямой линии) меньше стягиваемой им дуги (кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая линия). Таким образом, последовательность периметров вписанных многоугольников не только монотонна, но и ограничена, и значит, имеет предел. Из сказанного вытекает, что этот предел не может быть больше длины окружности.

Из рис. 1.13, *б* очевидно, что периметр каждого следующего описанного многоугольника меньше, чем периметр предыдущего (периметр восьмиугольника меньше периметра квадрата и т.д.). Таким образом, периметр описанного многоугольника убывает с ростом числа сторон, т.е. образует монотонно убывающую последовательность. При этом очевидно, что она ограничена (хотя бы потому, что все ее члены больше нуля). Таким образом, и последовательность описанных многоугольников также имеет предел. Обосновать, что периметр описанного многоугольника больше длины окружности, сложнее, и здесь нам придется обратиться к наглядному образу (каждая ломаная, соединяющая точки касания, больше, чем дуга окружности с теми же концами). Таким образом, если принять последнее соображение, то получим, что предел последовательности периметров описанных многоугольников не меньше длины окружности.

Из сказанного выше вытекает, что если нам удастся доказать, что пределы периметров вписанных и описанных многоугольников совпадают, то тем самым мы докажем, что этот предел и есть длина окружности. Сейчас мы этим и займемся.

Впишем в окружность и опишем около нее правильный многоугольник с n сторонами ($n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$), как показано на рис. 1.14. На этом рисунке изображена одна сторона (AB) вписанного и одна сторона (CD) описанного n-угольников с проведенными к вершинам (A и B) вписанного многоугольника и к точке (E) касания описанного многоугольника радиусами R, $R = OA = OB = OE$. Обозначим сторону вписанного многоугольника через a_n, а описанного — через b_n.

Очевидно, что угол α между радиусами OA и OB равен $\alpha = \dfrac{360°}{n}$, $OE \perp CD$, $OE \perp AB$, $CE = ED = \dfrac{b_n}{2}$, $AF = FB = \dfrac{a_n}{2}$, где F — точка пересечения линий OE и AB.

Тогда из $\triangle OFB$ имеем $FB = OB \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$, откуда $a_n = 2R \cdot \sin\dfrac{360°}{2n}$. Из $\triangle OED$ имеем $ED = OE \cdot \operatorname{tg}\dfrac{360°}{2n}$, откуда $b_n = 2R \cdot \operatorname{tg}\dfrac{360°}{2n}$. Отсюда следует, что периметр правильного вписанного n-угольника равен $P_n' = n \cdot 2R \cdot \sin\frac{360°}{2n}$, а описанного — $P_n'' = n \cdot 2R \cdot \operatorname{tg}\frac{360°}{2n}$.

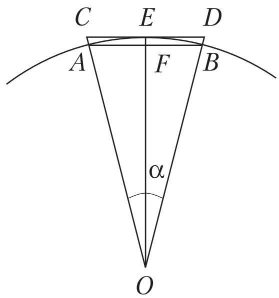


Рис. 1.14. **К доказательству равенства периметров**

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n'}{P_n''} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2R\cdot\sin\frac{360°}{2n}}{n\cdot 2R\cdot\operatorname{tg}\frac{360°}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{360°}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{360°}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{360°}{2n}\cdot\cos\frac{360°}{2n}}{\sin\frac{360°}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{360°}{2n} = \cos 0° = 1.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n'}{P_n''} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P'}{\lim\limits_{n\to\infty} P''} = 1$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P_n' = \lim_{n\to\infty} P_n''. \tag{1.6}$$

Этот предел и принимается за длину окружности: $c = \lim\limits_{n\to\infty} P_n' = \lim\limits_{n\to\infty} P_n''$.

Определение 1.18. *Длиной окружности* называется предел последовательности периметров правильных вписанных многоугольников.

Может возникнуть естественный вопрос: если в определении идет речь только о вписанных многоугольниках, зачем мы тогда рассматривали еще и описанные и доказывали равенство пределов (1.6)?

Ответ таков: для того, чтобы это определение было корректным, чтобы оно правдоподобно определяло именно длину окружности, а не какую-то, возможно, меньшую величину и соответствовало практическому опыту человека.

Замечание 1.11. Обратим ваше внимание на то, что не всякая последовательность кривых, неограниченно приближающихся к данной кривой, годится для определения ее длины. Пусть, например, мы хотим определить длину гипотенузы египетского треугольника[1] путем последовательного приближения ломаными линиями со звеньями, параллельными его катетам (рис. 1.15).

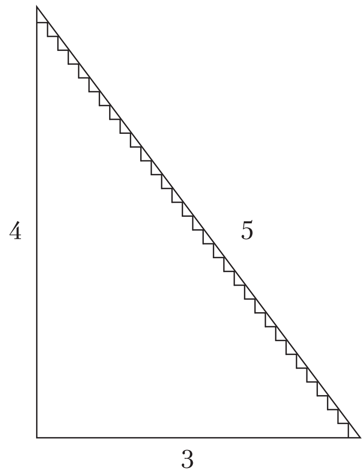


Рис. 1.15. **К замечанию 1.11**

Понятно, что при достаточно сильном измельчении звеньев ломаная практически сольется с гипотенузой. Однако поскольку звенья ломаной параллельны катетам, то общая ее длина равна сумме длин катетов, т.е. 3 + 4 = 7 при любой длине отдельных звеньев, сколь бы малыми они ни были. Длина же гипотенузы равна 5. Как мы видим, при таком приближении измеряемой линии с помощью последовательности других линий предел длин этих линий не совпадает с истинной длиной измеряемой линии.

Итак, мы определили окружность как предел периметров вписанных многоугольников: $C = \lim\limits_{n\to\infty} P'_n$. Покажем теперь, что отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от ее размеров. Для этого напишем отношение периметра правильного многоугольника к диаметру и перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_n}{2R} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2R\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{2n}}{2R} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\right).$$

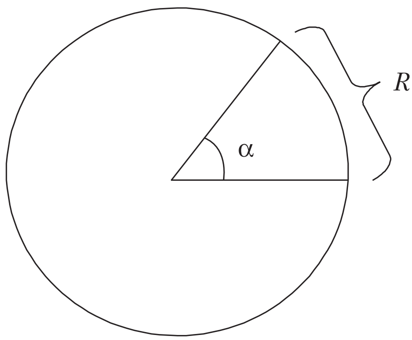
Как видим, этот предел ни от каких параметров окружности не зависит, т.е. это универсальная постоянная величина, как говорят математики, инвариант. Эту величину с подачи величайшего математика XVIII в. Леонарда Эйлера стали обозначать греческой буквой π (от греческого слова περιφερεια — окружность):

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\right). \tag{1.7}$$

[1] Египетским треугольником называется прямоугольный треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5.

Приведенное выше определение длины окружности дает способ вычисления числа π. Еще Архимед в III в. до н.э., вписывая в окружность и описывая около нее правильные 96-угольники, вычислил отношение длины окружности к ее диаметру (фактически, число π) с точностью до двух знаков после запятой: $3\frac{10}{71} = 3{,}1408... < \pi < 3\frac{1}{7} = 3{,}1428...$. В XVIII в. было доказано, что число π является числом иррациональным, т.е. представимым в виде бесконечной непериодической десятичной дроби: $\pi = 3{,}14159...$. В настоящее время существует множество различных способов вычисления числа π с любой заданной точностью, которую только позволяют достигнуть современные компьютеры.

Итак, длина окружности равна $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности, а π — универсальная константа, о которой только что шла речь. Из этого соотношения ясно, что радиус укладывается на окружности $2\pi \approx 6{,}28$ раза. Для угла, под которым виден отрезок дуги окружности, равный по длине радиусу, вводится специальная единица измерения, названная *радианом* (от слова «радиус»), т.е. этот угол равен 1 радиану (1 рад.) (рис. 1.16).



$\alpha = 1$ радиан

Рис. 1.16. **Иллюстрация угла в 1 радиан**

Любая дуга окружности может быть измерена в радианах. Для этого нужно длину дуги разделить на длину радиуса. Так, например, радианная мера дуги всей окружности и соответствующего центрального угла (полного угла 360°) равна 2π радиан, половины окружности (и развернутого угла 180°) — π радиан, четверти окружности (прямого угла 90°) — $\frac{\pi}{2}$ радиан. Так введенная мера удобна тем, что она является безразмерной величиной — просто числом, так как это отношение величин одинаковой размерности: длины дуги окружности к длине радиуса. Поэтому слово «радиан» часто опускают.

Поскольку радианная мера дуги окружности длины l равна $\alpha = \frac{l}{R}$, то отсюда можно выразить длину дуги через ее радианную меру: $l = R\alpha$.

Легко установить соответствие между радианной и градусной мерой дуги (угла) из пропорции:

$$180° = \pi\,(\text{рад}),$$
$$\varphi° = \alpha\,(\text{рад}),$$

откуда $\alpha = \dfrac{\pi\varphi°}{180°}$, $\varphi° = \dfrac{\alpha \cdot 180°}{\pi}$.

В частности, $1\,\text{рад} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Соответствие градусной и радианной меры для некоторых углов приведено в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Соответствие градусной и радианной меры

30°	45°	60°	90°
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Пример 1.39

Найдем длину дуги окружности радиуса $R = 2$, если вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен $\beta = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Как известно из геометрии, центральный угол такой дуги вдвое больше вписанного угла, т.е. равен $\dfrac{\pi}{3}$. Таким образом, длина дуги равна $l = R \cdot 2\beta = 2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$.

1.5.3. Определение площади круга

Площадь круга определяется аналогичным способом путем вписывания в круг и описывания около него правильных многоугольников. С логической точки зрения обоснование вывода площади круга решается даже несколько проще. Если ввести очевидную аксиому: площадь объемлющей фигуры не меньше площади объемлемой, то можно понятие площади круга не вводить как определение, а просто вывести для нее формулу. Проделаем эту операцию.

Впишем в окружность и опишем около нее многоугольник с n сторонами, как это сделано на рис. 1.13, и подсчитаем площадь вписанного (S'_n) и описанного (S''_n) n-угольников:

$$S'_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\alpha = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\alpha = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} =$$
$$= n \cdot R^2 \cdot \sin\frac{360°}{2n} \cdot \cos\frac{360°}{2n};$$

$$S''_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CD = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{360°}{2n}.$$

Поскольку каждый вписанный правильный $2n$-угольник включает в себя вписанный (как показано на рис. 1.13, *а*) правильный n-угольник, то площадь первого больше площади второго, и значит, последовательность таким образом вписанных многоугольников является монотонно возрастающей. Кроме того, площадь каждого вписанного многоугольника не больше площади любого описанного многоугольника (например, первого), и значит, ограничена. Отсюда вытекает, что последовательность площадей правильных вписанных n-угольников имеет предел. Но каждый вписанный многоугольник содержится в рассматриваемом круге, откуда следует, что его площадь не больше площади круга (если она вообще существует).

Аналогичным образом, поскольку каждый описанный правильный $2n$-угольник содержится в описанном правильном n-угольнике (как показано на рис. 1.13, *б*), то площадь первого меньше площади второго, и значит, последовательность таким образом описанных многоугольников является монотонно убывающей. Кроме того, площадь каждого описанного многоугольника не меньше площади любого вписанного многоугольника (например, первого), и значит, ограничена снизу. Отсюда вытекает, что она имеет предел. Но каждый описанный многоугольник содержит рассматриваемый круг, откуда следует, что его площадь не меньше площади круга (если она вообще существует).

Таким образом, если мы покажем, что пределы площадей вписанных и описанных многоугольников совпадают, то это будет означать, что площадь круга как величина, заключенная между членами этих последовательностей, равна упомянутому пределу.

Итак, покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n$. Действительно,

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} S'_n}{\lim\limits_{n\to\infty} S''_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S'_n}{S''_n} = \frac{n\cdot R^2\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{2n}\cdot\cos\dfrac{360^\circ}{2n}}{n\cdot R^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{360^\circ}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{360^\circ}{2n}\cdot\cos\dfrac{360^\circ}{2n}}{\operatorname{tg}\dfrac{360^\circ}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{360^\circ}{2n} = \cos^2 0^\circ = 1,$$

откуда следует, что указанные пределы равны: $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n$.

Таким образом, площадь круга равна пределу последовательности площадей правильных вписанных (описанных) многоугольников, каждый следующий из которых имеет вдвое большее число сторон, чем предыдущий. Найдем теперь, чему равна площадь круга, используя равенство (1.7):

$$S = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot R^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\cdot\cos\frac{360^\circ}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(R^2\cdot\cos\frac{360^\circ}{2n}\right)\left(n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(R^2\cdot\cos\frac{360^\circ}{2n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{360^\circ}{2n}\right) = R^2\cdot\cos 0^\circ\cdot\pi = \pi R^2.$$

Замечание 1.12. Мы всюду в подпараграфах 1.5.2 и 1.5.3 рассматривали последовательности вписанных и описанных правильных многоугольников с количеством сторон $n = 2^k$. То, что многоугольники правильные, принципиально (постройте контрпримеры). Можно показать, что количество сторон непринципиально, лишь бы число сторон каждого следующего правильного многоугольника — члена последовательности было больше, чем у предыдущего.

Зная формулу для площади круга, нетрудно вывести формулу для кругового сектора с центральным углом α (рис. 1.17). Очевидно, что площадь сектора составляет такую же часть от площади круга, как и угол α от полного угла (2π, или $360°$). Таким образом,

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2,$$

если угол задан в радианах, или

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\alpha°}{360°}\pi R^2,$$

если угол задан в градусах.

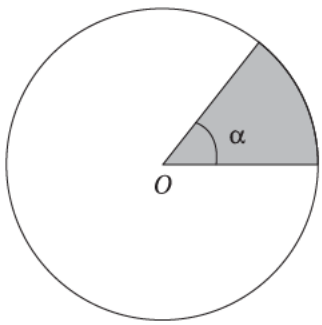


Рис. 1.17. **К определению площади кругового сектора**

После этого нетрудно сообразить, как вычислить площадь кругового сегмента (рис. 1.18). Для этого нужно из площади сектора вычесть площадь треугольника OAB:

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\triangle} = \frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha),$$

где угол α задан в радианах, $0 < \alpha < \pi$.

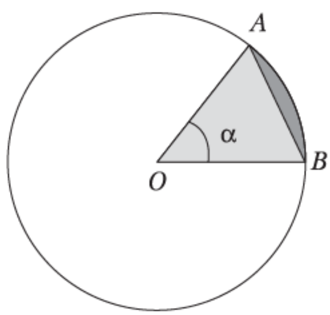


Рис. 1.18. **К определению площади кругового сегмента**

Пример 1.40

Найдем площадь сегмента круга радиуса $R = 1$ м, который виден под углом 30° из центра круга.

Решение. Угол 30° равен $\frac{\pi}{6}$ радиан. Таким образом, площадь сегмента равна

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi-3}{12}\text{ м}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Можно ли длину окружности измерять как предел последовательности произвольных вписанных многоугольников с увеличивающимся количеством сторон?
2. Поясните, для чего нам понадобились описанные правильные многоугольники при определении площади круга.
3. Что такое число π? Какие способы его вычисления вам известны?
4. Что такое сектор? Как можно вычислить его площадь?
5. Что такое сегмент? Как можно вычислить его площадь?
6. Что такое градус и радиан? Какая связь существует между ними?
7. Укажите, как изменится формула для вычисления площади сегмента, если $\pi<\alpha<2\pi$.

Упражнения

1.55. Вычислите длину дуги окружности радиуса 1, которая видна из центра круга под углом, равным 60°.

1.56. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу окружности радиуса 2, длина которой равна $\frac{\pi}{4}$.

1.57. Для окружности радиуса R выведите формулу для длины ее дуги с центральным углом, равным α°.

1.58. Земной шар (радиус 64 000 км) вдоль экватора и футбольный мяч (диаметр 25 см) по окружности большого круга опоясаны нерастяжимой веревкой. Затем обе веревки удлинили на 1 м и равномерно растянули так, чтобы зазор между новым положением веревки и старым был всюду одинаков. Какова величина зазора для земного шара и футбольного мяча?

1.59. Диаметр колеса автомобиля равен 70 см. Сколько оборотов сделает колесо, если автомобиль проедет 1 км?

1.60. Автомобильное колесо диаметром 80 см рассчитано на 20 млн оборотов. На какую длину пробега рассчитано колесо?

1.61. Две сцепленные шестерни имеют радиусы 1 м и 30 см. Сколько оборотов сделает малая шестерня, когда большая сделает один оборот?

1.62. В угол величиной 60° вписана бесконечная последовательность окружностей, касающихся друг друга и сходящихся к вершине угла. Радиус самой большой окружности равен единице. Вычислите сумму длин всех окружностей.

1.63. Найдите площадь кругового сектора радиуса 3 с центральным углом, равным 2 рад.

1.64. Найдите площадь сегмента круга радиуса 4, который виден из центра круга под углом, равным $\pi/6$ рад.

1.65. Найдите площадь пересечения двух кругов радиуса 1 см, центр каждого из которых лежит на окружности другого круга.

1.66. В круг радиуса 1 вписан квадрат. В этот квадрат вписан круг. В него вписан квадрат и т.д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех кругов.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

В результате изучения главы 2 студент должен:

знать

- определения и свойства предела функции в точке и в бесконечности;
- определения и свойства непрерывности функции в точке;

уметь

- вычислять пределы функции в точке и в бесконечности;
- устанавливать непрерывность или разрывность функции в точке;

владеть

- навыками вычисления пределов функций;
- навыками оперирования с непрерывными функциями.

Развитием понятия предела последовательности является понятие предела функции. Как уже отмечалось в гл. 1, последовательность — это тоже функция, но аргумент ее принимает только натуральные значения. Сейчас же мы будем рассматривать функции $y = f(x)$, аргумент которых принимает действительные значения $x \in \mathbb{R}$. При этом необязательно, чтобы переменная x пробегала множество всех действительных чисел. Множество значений, которые может принимать переменная x, как вы знаете, называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Мы ограничимся случаем, когда область определения функции состоит из конечного множества непересекающихся промежутков и (или) отдельных точек. В частности, $D(f)$ может совпадать со всей числововой прямой.

Напомним, что промежутками называются:

1) отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$;

2) интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

3) полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ и $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$;

4) луч (полупрямые с концевыми точками) $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ и $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$;

5) интерлуч (полупрямые без концевых точек) $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ и $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;

6) числовая прямая $(-\infty; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

Фигурирующие в приведенных выше выражениях точки a и b называются концами соответствующих промежутков: a — левым концом, b — правым концом.

Замечание 2.1. В математике рассматриваются функции, заданные и на более сложных множествах, в том числе на «сильно дырявых», например на множестве рациональных чисел. Функции с такого рода областями определения мы рассматривать не будем.

Определение 2.1. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Обозначается $O(x_0)$. Например, $O\left(\dfrac{5}{2}\right)=(0;3); O\left(\dfrac{5}{2}\right)=(1;4)$ и т.д.

Как было сказано в подпараграфе 1.3.1, интервал $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$ при $\varepsilon>0$ называется ε-*окрестностью* точки x_0 (рис. 2.1).

Обозначается ε-окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ или $O(x_0,\varepsilon)$. Например, $O_1(7)=(6;8)$.

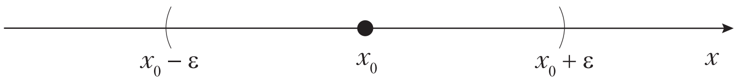


Рис. 2.1. **ε-окрестность точки**

Наряду с полными окрестностями будем рассматривать также односторонние окрестности: правостороннюю $[x_0;\ x_0+\varepsilon)$ и левостороннюю $(x_0-\varepsilon;\ x_0]$.

Определение 2.2. *Проколотой окрестностью* (*проколотой ε-окрестностью*) точки x_0 называется множество $\dot{O}(x_0)=O(x_0)\setminus\{x_0\}$, соответственно $\dot{O}_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}=(x_0-\varepsilon;\ x_0)\cup(x_0;\ x_0+\varepsilon)$, получающееся выкалыванием (исключением) точки x_0 из ее окрестности.

2.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ задана на некотором множестве действительных чисел $D(f)$ указанного выше вида.

Определение 2.3. Точка x_0, в любой окрестности которой существует точка $x\in A$, отличная от x_0 (в проколотой окрестности), называется *предельной* точкой множества A.

Сама точка x_0 может принадлежать множеству A или не принадлежать ему. Так, если множество A — отрезок, $A=[a;b]$, то предельными являются все его точки, в частности концы отрезка — точки $x=a$ и $x=b$, причем эти точки принадлежат самому отрезку. Если же множество A — интервал, $A=(a;b)$, то предельными являются не только все его точки, но и концы интервала — точки $x=a$ и $x=b$, причем концы интервала не принадлежат самому интервалу. Заметим, что никакая из точек $x_0\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$ не является предельной ни для отрезка $[a;b]$, ни для интервала $(a;b)$, так как всегда найдется окрестность точки x_0, не содержащая ни одной точки этого отрезка или интервала. Так, например, если $x_0<a$, то достаточно взять окрестность $\left(x_0-\dfrac{a-x_0}{2};\ x_0+\dfrac{a-x_0}{2}\right)$ (рис. 2.2).

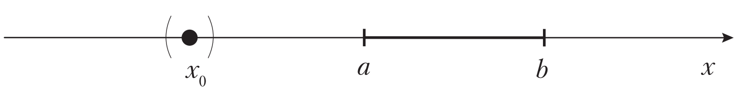


Рис. 2.2. **Окрестность $O(x_0)$, не содержащая точек из отрезка $[a;b]$**

Здесь нас будут интересовать предельные точки области определения функции $D(f)$. Предельными точками области определения функции (при принятых нами ограничениях) являются все точки промежутков, а также их концы, даже если они этим промежуткам не принадлежат. Кроме предельных точек в области определения функции могут присутствовать еще так называемые изолированные точки.

Определение 2.4. Точка $x_0 \in A$, в некоторой окрестности которой нет точек $x \in A$, отличных от x_0 (в проколотой окрестности), называется *изолированной* точкой множества A.

Примером функции, область определения которой содержит изолированную точку (и вообще, одну точку), может служить функция $f(x)=\sqrt{-x^2}$. Очевидно, что $D(f) = \{0\}$.

Изолированные точки, как следует из определений, предельными не являются. Рассматриваемые далее понятия предела и непрерывности функции в точке для изолированных точек из области определения функции не вводятся.

Различают два вида предельных точек множества A: внутренние точки и граничные точки (рис. 2.3).

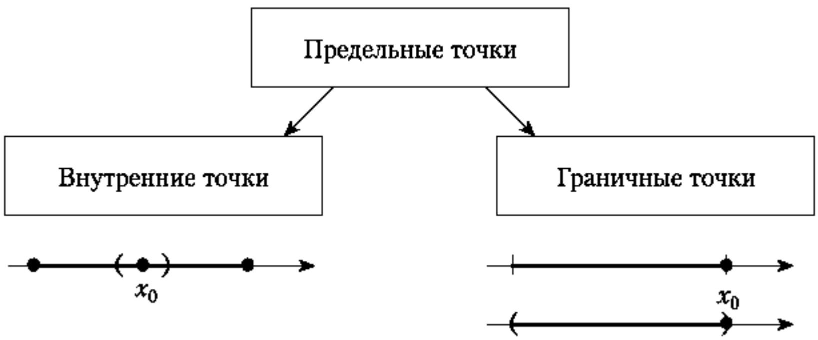


Рис. 2.3. **Предельные точки**

Определение 2.5. Точка x_0, которая содержится в множестве A вместе с некоторой своей окрестностью, называется *внутренней* точкой множества A. Множество, каждая точка которого является внутренней для данного множества, называется *открытым*.

Определение 2.6. Точка x_0, в некоторой окрестности которой содержатся как точки из множества A, так и точки, ему не принадлежащие, называется *граничной* точкой множества A. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*.

Несложно доказать, что в определении замкнутого множества слово «граничные» можно заменить на «предельные» — существо понятия от этого не изменится.

Граничная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству A.

Пусть, например, $A=(1;2]\cup\{3\}$. Тогда внутренними точками множества A являются все точки интервала (1; 2). Граничными точками множества A являются три точки: 1, 2 и 3. Предельными точками являются все точки отрезка [1; 2]. Точка 3 является изолированной точкой множества A.

Хотя в определении предельной точки требуется, чтобы в любой ее окрестности существовала *хотя бы одна* точка из множества A, отличная от данной, на самом деле в любой окрестности предельной точки x_0 содержится *бесконечное множество* точек, принадлежащих множеству A. Более того, можно выбрать такую последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, которая сходится к точке x_0. Действительно, в любой ее окрестности есть хотя бы одна точка x_1, отличная от x_0 (рис. 2.4, *а*). Возьмем окрестность поменьше так, чтобы точка x_1 в ней не содержалась (рис. 2.4, *б*).

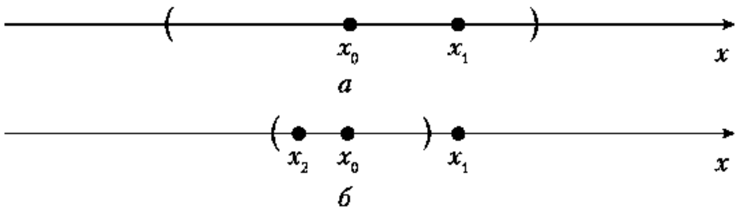


Рис. 2.4. **Точки в окрестности и вне окрестности**

В новой окрестности по условию также должна содержаться хотя бы одна точка из области определения функции, отличная от x_0. Обозначим такую точку x_2 и т.д. В результате мы получим бесконечную последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Если к тому же длины выбираемых окрестностей неограниченно уменьшать, устремив их к нулю (а это всегда можно сделать), то данная последовательность точек, как вы уже знаете, будет сходиться к точке x_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Рассмотрим значения функции в этих точках: $y_n = f(x_n)$. Эти значения также образуют бесконечную последовательность y_n. Эта последовательность может иметь предел, а может и не иметь. Кроме того, может случиться, что при выборе различных последовательностей $x_1, x_2, x_3, \ldots$ пределы $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ будут различными. Однако если, как бы мы ни выбирали последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ будет существовать, причем один и тот же, то тогда этот предел называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0. Этот предел обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Пример 2.1

Пусть $f(x) = x^2$. Рассмотрим последовательность точек $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, сходящуюся к точке $x = 1$.

Решение. Найдем значения функции в этих точках:

$$f(x_n) = x_n^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ (рис. 2.5, *а*).

Возьмем другую последовательность точек $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, сходящуюся к точке $x = 1$. Найдем значения функции в этих точках:

$$f(x_n) = x_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$ (рис. 2.5, *б*).

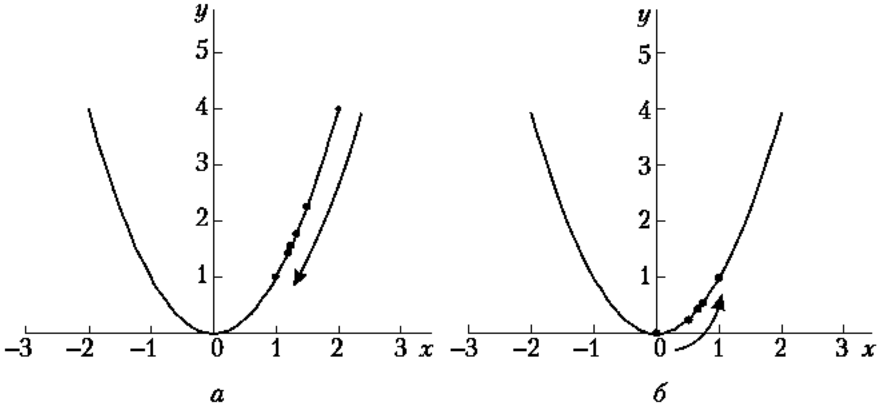


Рис. 2.5. **К примеру 2.1**

Как мы видим, и в первом, и во втором случае предел значений функции оказался одним и тем же. Однако это еще не доказывает, что $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$, поскольку для доказательства нужно перебрать всевозможные последовательности точек x_n, сходящиеся к точке $x = 1$. Конечно, перебрать все такие последовательности невозможно, поскольку их бесчисленное множество. Поэтому для доказательства применяют другие приемы, о которых речь пойдет ниже.

Заметим, что в рассмотренном примере точка $x = 1$ входит в область определения функции $f(x)$, причем значение функции в ней совпадает со значениями полученных пределов. В таких случаях говорят, что функция в данной точке (x_0) непрерывна (см. параграф 2.2).

Пример 2.2

Пусть $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Рассмотрим последовательность точек $x_n=\frac{1}{\pi n}$, сходящуюся к точке $x = 0$.

Решение. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_n)=\sin\frac{1}{1/(\pi n)}=\sin\pi n=0$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

Возьмем другую последовательность точек $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, также сходящуюся к точке $x = 0$. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_n)=\sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$.

Поскольку пределы значений функции, взятые для разных последовательностей $x_n\to0$, не совпадают, отсюда можно заключить, что предела $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (рис. 2.6).

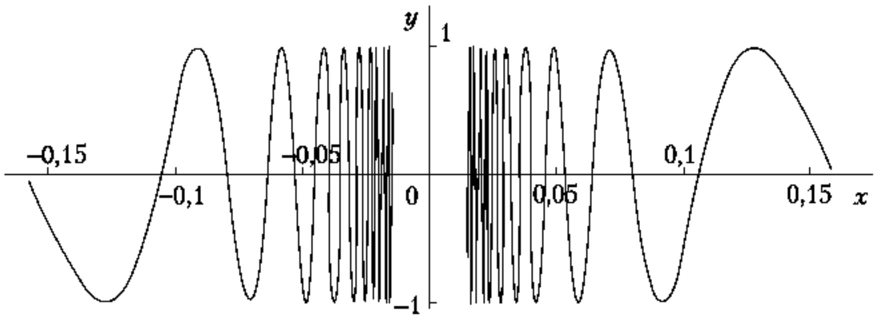


Рис. 2.6. **К примеру 2.2**

График этой функции при стремлении аргумента к нулю совершает бесконечное число колебаний с амплитудой, равной 1: от значения -1 до значения 1. В точке $x=0$ значения функции не существует. Она не входит в область определения функции, но является предельной для нее.

Пример 2.3

Пусть $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. Рассмотрим последовательность точек $x_n=-1+\dfrac{1}{n}$, сходящуюся к точке $x=-1$, и значения функции в них.

Решение. Имеем

$$f(x_n)=\frac{x_n-1}{x_n+1}=\frac{-1+\dfrac{1}{n}-1}{-1+\dfrac{1}{n}+1}=\frac{-2+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=-2n+1.$$

Очевидно, что при стремлении номера члена последовательности к бесконечности значение $f(x_n)$ стремится к минус бесконечности, т.е. предела не имеет (рис. 2.7). В данном случае точка $x=-1$ также не входит в область определения функции, но является предельной для нее.

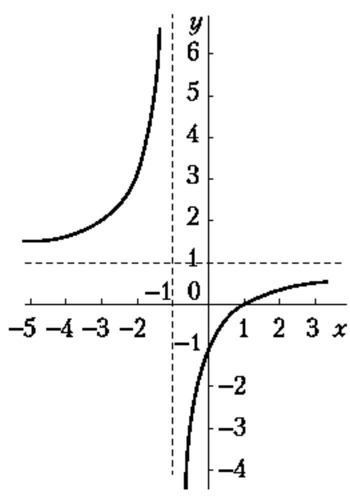


Рис. 2.7. **К примеру 2.3**

Итак, мы видели, что, для того, чтобы функция имела предел в точке x_0, необходимо, чтобы при стремлении аргумента x к этой точке по любому закону значение $f(x)$ всегда стремилось к одному и тому же числу.

Дадим теперь строгое определение предела функции в точке.

Определение 2.7. Пусть x_0 — предельная точка[1] области определения функции f. Число a называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 (или: при x, стремящемся к x_0), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq x_0$), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Данное определение принадлежит немецкому математику XIX в. Е. Гейне (1821—1881).

Поясним, почему в определении членам последовательности $\{x_n\}$ запрещается принимать значение x_0. Приведенное выше определение соответствует интуитивному понятию предела: предел — это не значение $f(x_0)$, которое принимает функция в рассматриваемой точке x_0, а то, к чему стремится значение функции, когда x стремится к x_0. Да и для построения математического аппарата ограничение $x_n \neq x_0$ оказывается очень удобным, в чем мы убедимся, например, при рассмотрении понятия производной (см. гл. 3). Таким образом, в определении предела функции в точке x_0 безразлично, задана ли функция в самой точке x_0 или нет, а если и задана, — не важно, какое значение в ней имеет функция.

Пример 2.4

Пусть функция $f(x)$ задана условием

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{при } x \neq -1, \\ 0 & \text{при } x = -1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $x = -1$ выражение в верхней строчке формулы не существует. Ввиду этого его можно как-то доопределить, что и сделано в нижней строчке. Посмотрим, будет ли существовать предел функции в точке $x = -1$, и если да, то совпадает ли он со значением, заданным второй строчкой (рис. 2.8).

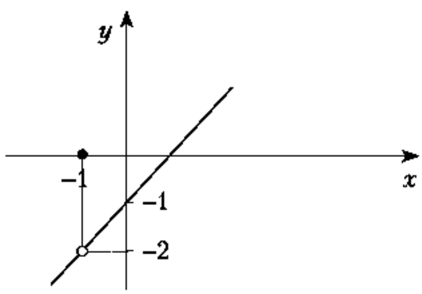


Рис. 2.8. **К примеру 2.4**

---

[1] Точка x_0 должна быть предельной для области определения функции $D(f)$, иначе определение теряет смысл, поскольку в противном случае ни одной последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к x_0, не существует.

Подсчет дает (при $x \neq -1$): $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$. Далее, если $x_n \to -1$, то $x_n - 1 \to -2$, т.е. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty}(x_n - 1) = -2$, т.е. предел существует и не равен значению функции в рассматриваемой точке.

Заметим, что если бы в определении предела не было оговорки $x_n \neq x_0$, то в этом случае функция в точке $x = -1$ предела бы не имела, поскольку в качестве одной из последовательностей можно было бы взять, например, последовательность-константу $x_n = -1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Для этой последовательности предел функции был бы равен нулю, т.е. не совпадал бы с пределами по некоторым другим последовательностям.

Существует другое, эквивалентное данному, определение предела, принадлежащее французскоиу математику Огюстену Луи Коши (1789—1857). Это определение не использует последовательностей $\{x_n\}$, сходящихся к рассматриваемой точке x_0. В математике чаще используется именно это определение.

Определение 2.8. Пусть x_0 — предельная точка области определения функции $f(x)$. Число a называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq x_0$, $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Сама точка x_0 может принадлежать, но может и не принадлежать области определения функции $f(x)$.

Прокомментируем это определение. Неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ означает, что значение функции $f(x)$ должно находиться в ε-окрестности точки a, т.е. $f(x) \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а неравенство $|x - x_0| < \delta$ означает, что точка x принадлежит проколотой δ-окрестности точки x_0, т.е. $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ (рис. 2.9). Логика определения такова: как только x, $x \neq x_0$, попадает в δ-окрестность точки x_0, значение функции в точке x должно попасть в ε-окрестность точки a. Но это только часть логики, ее ядро. Про ε-окрестность говорится, что она задается произвольно (т.е. может быть сколь угодно малой, но все же не пустой), а про δ-окрестность говорится, что ее следует найти после задания ε-окрестности. Приведенное определение — это перефразировка условия: значениям аргумента x, сколь угодно близким к x_0, должны соответствовать значения $f(x)$, сколь угодно близкие к числу a.

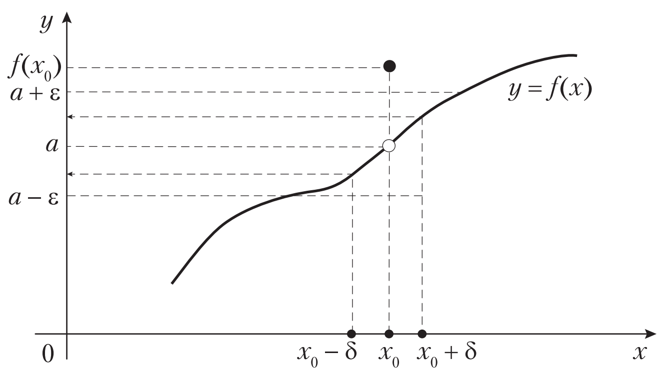


Рис. 2.9. **К определению предела по Коши**

Замечание 2.2. В определении предела функции f в точке x_0 не требуется существования такой ее окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, чтобы $(x_0-\delta,\ x_0)\subseteq D(f)$ и $(x_0,\ x_0+\delta)\subseteq D(f)$. В частности, функция может быть задана только слева или справа от точки x_0.

Определение 2.9. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Аналогично тому, как это рассматривалось для последовательностей, имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A=\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

Для предела функции в точке справедливы теоремы, аналогичные таковым для пределов последовательностей. Всюду далее будем предполагать, что точка x_0 является предельной для области определения функции.

Теорема 2.1. *Пусть точка* x_0 *является предельной для* $D(f)\cap D(g)$ — *пересечения областей определения функций* f и g. *Тогда если существуют* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *то выполнены следующие соотношения*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Или словесно: предел суммы, разности, произведения равен сумме, разности, произведению пределов соответственно, если пределы в правой части равенств существуют.

Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)/\lim_{x\to x_0} g(x)$$

(предел частного равен частному пределов).

Теорема 2.2. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела*: *если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *существует, то* $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ c\in\mathbb{R}$.

Техника доказательства и вычисления пределов аналогична той, что использовалась для последовательностей.

Замечание 2.3. Условие $x_0\in D(f)\cap D(g)$ существенно. Действительно, пусть функция $f(x)$ задана на множестве ранициональных чисел, $f(x)=x$, а $g(x)$ — на множестве иррациональных чисел, $g(x)=x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, но функция $f(x)+g(x)$ не существует, так как область ее определения — пустое множество.

Пример 2.5

Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} x^2=x_0^2$.

Решение. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти такое число $\delta > 0$, чтобы для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, было выполнено неравенство $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Итак, попробуем найти требуемое число δ. Для этого преобразуем выражение $|x^2 - x_0^2|$, считая, что как будто нужное значение δ мы уже нашли:

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta \cdot |x + x_0|.$$

Но $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$. А так как $|x - x_0| < \delta$, то $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, откуда следует, что $|x| < |x_0| + \delta$.

Таким образом,

$$|x + x_0| \leq |x| + |x_0| < |x_0| + \delta + |x_0| = 2|x_0| + \delta.$$

Поскольку мы можем число δ выбирать по своему усмотрению, будем выбирать его из чисел, не больших единицы (но, естественно, больших нуля): $0 < \delta \leq 1$. Тогда $2|x_0| + \delta \leq 2|x_0| + 1$ и, значит, $|x^2 - x_0^2| < \delta \cdot |x + x_0| < \delta \cdot (2|x_0| + 1)$.

Если мы теперь укажем такое положительное число δ, при котором последнее выражение будет меньше ε, то тем самым утверждение будет доказано. Итак, возьмем $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}; 1\right\}$. Тогда

$$|x^2 - x_0^2| < \delta \cdot (2|x_0| + 1) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}; 1\right\} \cdot (2|x_0| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}(2|x_0| + 1) = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.6

Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 6x - 20}$.

Решение. Непосредственно подставлять вместо x число 2 нельзя, поскольку знаменатель при этом обращается в нуль. Числитель при $x = 2$ тоже обращается в нуль, т.е. мы имеем дело с так называемой неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Для вычисления предела дробно-рациональных выражений в таких случаях раскладывают многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, на множители, и равные одночлены сокращают:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 6x - 20} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x+5)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)}{2(x+5)}.$$

Сокращение на выражение, обращающееся в нуль в точке x_0, законно, поскольку в определении предела, как уже говорилось, рассматриваются все точки из некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ за исключением самой точки x_0. Забегая немного вперед, скажем, что при вычислении пределов непрерывных функций если при подстановке в ее выражение предельной точки x_0 получается некоторое число, то оно и будет пределом. В нашем случае будем иметь

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-3)}{2(x+5)} = \frac{2-3}{2(2+5)} = -\frac{1}{14}.$$

Пример 2.7

Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{2x - 6} - \frac{3}{x^2 - 9}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{1}{2x-6}-\frac{3}{x^2-9}=\frac{1}{2(x-3)}-\frac{3}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+3)-6}{2(x^2-9)}=\frac{x-3}{2(x^2-9)}=\frac{1}{2(x+3)};$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2x-6}-\frac{3}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2(x+3)}=\frac{1}{12}.$$

Пример 2.8

Найдем все значения параметра p, при которых существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{px^2-2}{2x^2-x-6}$. Найдем этот предел.

Решение. При $x=2$ знаменатель обращается в нуль. Для существования предела необходимо, чтобы и числитель дроби обращался в нуль: $p\cdot 2^2-2=0$. Следовательно, $p=\frac{1}{2}$. Далсс получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}x^2-2}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2(x-2)(2x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2(2x+3)}=\frac{2}{7}.$$

Пример 2.9

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1}$.

Решение. В примерах такого типа очень полезно бывает выполнить замену переменной.

Пусть $\sqrt[5]{x+31}=t$. Тогда $x=t^5-31$. При x, стремящемся к 1, новая переменная t стремится к 2. Получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^4+t^3\cdot 2+t^2\cdot 2^2+t\cdot 2^3+2^4)}=$$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^4+t^3\cdot 2+t^2\cdot 2^2+t\cdot 2^3+2^4}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{5\cdot 2^4}=\frac{1}{80}.$$

Пример 2.10

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+6}}{x+1}$.

Решение. При подстановке $x=-1$ получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Умножим (по аналогии с последовательностями) числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6}$, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+6}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+6})(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6})}{(x+1)(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+5)-(2x+6)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6})}=\lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+6}}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 2.11

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{3x+21}-\sqrt[3]{5x+17}}$.

Решение. При подстановке $x=2$ получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение

$$\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}.$$

Получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{3x+21}-\sqrt[3]{5x+17}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)[\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}]}{(\sqrt[3]{3x+21}-\sqrt[3]{5x+17})[\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)[\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}]}{(3x+21)-(5x+17)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)[\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}]}{4-2x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)[\sqrt[3]{(3x+21)^2}+\sqrt[3]{3x+21}\cdot\sqrt[3]{5x+17}+\sqrt[3]{(5x+17)^2}]}{-2}=-\frac{27}{2}.$$

Пример 2.12

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+7}-\sqrt{x+3}}{x+2}$.

Решение. При подстановке $x=-2$ получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Преобразуем выражение следующим образом:

$$\frac{(\sqrt[3]{3x+7}-1)-(\sqrt{x+3}-1)}{x+2}=\frac{\sqrt[3]{3x+7}-1}{x+2}-\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{3x+7}-\sqrt{x+3}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{3x+7}-1}{x+2}-\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}.$$

Пределы такого типа нами рассмотрены ранее.

В данном примере возможно и иное решение. Выполним замену: $\sqrt{x+3}=t$, $t\to 1$. Тогда $x=t^2-3$ подставим в выражение:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{3x+7}-\sqrt{x+3}}{x+2}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{3(t^2-3)+7}-t}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{3t^2-2}-t}{t^2-1}.$$

Далее, как и прежде, умножим числитель и знаменатель выражения на неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{(3t^2-2)^2}+t\sqrt[3]{3t^2-2}+t^2$ и т.д.

Пример 2.13

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{1-x^4}-\dfrac{5}{1-x^5}\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{1-x^4}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(1+x+x^2)-3(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-3x^3+x^2+x+1}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(3x^2+2x+1)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2.14

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt[3]{2x-3}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})[1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}]}{(1-\sqrt[3]{2x-3})(x+\sqrt{x+2})[1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)[1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}]}{[1-(2x-3)](x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)[1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}]}{-2(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)[1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}]}{-2(x+\sqrt{x+2})}=-\frac{9}{8}.$$

Пример 2.15

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}\right)$.

Решение. Заметим, что $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$; $\sqrt{x}=x^{1/2}$. Приведем дроби 1/3 и 1/2 к общему знаменателю: 1/3 = 2/6, 1/2 = 3/6. Заменим $x^{1/6}=t$. Тогда $x=t^6$. При x, стремящемся к 1, величина t также стремится к 1. Получим: $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{2}{1-t^2}-\dfrac{3}{1-t^3}\right)=-\dfrac{1}{2}$ (аналогично примеру 2.13).

Пример 2.16

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Рассмотрим единичный круг и достаточно малую (меньшую, чем $\dfrac{\pi}{2}$) окрестность точки $x=0$ (рис. 2.10).

Очевидно, что площадь треугольника OAB меньше площади сектора $OAKB$, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника ODE:

$$S_{\triangle OAB}<S_{\text{сектора } OAKB}<S_{\triangle ODE}\Leftrightarrow AC\cdot OC<0{,}5\cdot 1^2\cdot 2x<OK\cdot DK\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cdot\cos x<x<\operatorname{tg}x\Leftrightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$, то по теореме о двух милиционерах (теорема 1.4 из гл. 1) и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

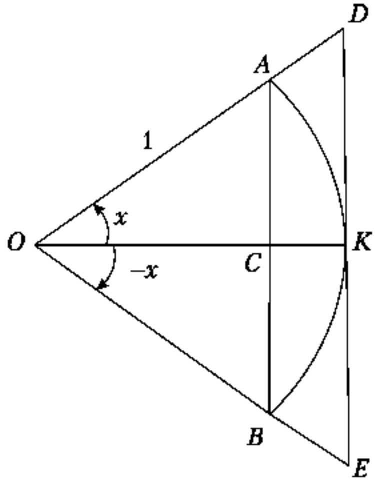


Рис. 2.10. **К примеру 2.16**

Этот предел называется *первым замечательным пределом*.

Пример 2.17

Вычислим пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\cdot\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x\cdot\sin 8x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 8x}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=3.$

$$б)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\cdot\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}}=9.$$

$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2\cdot x^2}{2\sin^2(2{,}5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2\cdot x^2}{2\left(\frac{\sin 2{,}5x}{x}\right)^2\cdot x^2}=\frac{4}{2\cdot 6{,}25}=0{,}32.$$

$$г)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x\cdot\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 3x}{x\cdot\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 8x}{x}}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{8}=1{,}5.$$

д) Выполним замену: $t=x-\pi\to 0$. Тогда получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+\pi)-\cos(3(t+\pi))}{\sin^2(8(t+\pi))}=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos t+\cos 3t}{\sin^2 8t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin t\cdot\sin 2t}{\sin^2 8t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}}{\left(\frac{\sin 8t}{t}\right)^2}=\frac{-2\cdot 2}{8^2}=-\frac{1}{16}.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что называется предельной точкой множества? Почему понятие предела функции рассматривается только для предельных точек ее области определения?
2. Приведите примеры множества, состоящего только из предельных точек.
3. Приведите примеры множества, не содержащего предельных точек.
4. Сколько предельных точек может содержать множество, состоящее их n точек?
5. Может ли бесконечное множество не содержать предельных точек?
6. Какие подходы к определению понятия предела функции в точке вы знаете? Чем они различаются?
7. Приведите примеры исчезновения точек существования предела функции, если из определения предела по Коши исключить ограничение $x \neq x_0$.
8. Почему в определении предела по Коши оговаривается положительность δ и ε?

Упражнения

2.1. Исходя из определения предела докажите, что $\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$.

2.2. Исходя из определения предела докажите, что $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}$ не существует.

2.3. Исходя из определения предела найдите $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$.

2.4. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+4x^2+2x}{x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{2}{x-4}-\frac{16}{x^2-16}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{2x+4}+\frac{2}{x^2-4}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x^2-5x+4}$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}}{x^2-5x+4}$; з) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$; и) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-\sqrt[3]{2x+6}}{1-x}$;

к) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{\sqrt[3]{3x+8}+\sqrt[3]{2x+7}}$; л) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{-3x^2+2x+1}{x^2}}-\sqrt{\frac{2x^2-2x+1}{x^2}}\right)$;

м) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{x+2}}{3x^2-5x-8}$ н) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{29-x}}$; о) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt[5]{x}}-\frac{5}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

п) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{10}{1-\sqrt{x}}-\frac{4}{1-\sqrt[5]{x}}\right)$; р) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{\operatorname{tg}^2x}$; с) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos3x}{\operatorname{tg}5x\cdot\sin x}$.

2.2. Непрерывность

Непрерывность функции ассоциируется с ее графиком, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. В принципе строгое определение непрерывности не противоречит этому интуитивному пониманию. Однако для того чтобы им можно было четко оперировать, данное понимание необходимо уточнить, придав ему однозначный характер.

Представление о непрерывности функции возникло в древности в связи с наблюдением происходящих в природе движений (течение воды, движение небесных тел и т.п.), а также линий и поверхностей предметов. С понятием непрерывности, тесно связанным с идеей бесконечности (разбиение на бесконечно малые кусочки), сталкивались еще древнегреческие философы и математики. Однако попытки четкого определения понятия непрерывности относятся лишь к XVII—XVIII вв. (И. Кеплер, Г. В. Лейбниц, Л. Эйлер). Эти попытки были еще довольно далеки от современного понимания и строгого определения непрерывности. Леонард Эйлер (1707—1783), например, считал непрерывной функцию, заданную аналитическим выражением — формулой. Если функция задавалась несколькими формулами на различных участках значений переменной, то он считал ее разрывной (прерывной, смешанной, неправильной), даже если значения формул в точке стыка совпадали. Лишь в 1823 г. выдающийся французский математик Огюстен Луи Коши предложил строгое определение непрерывности, совпадающее с современным. Еще до Коши строгое определение непрерывности дал чешский математик Бернард Больцано (1781—1848). Однако его труды были опубликованы только в 1851 г.

Несмотря на то что четкое определение понятия предела и непрерывности было выработано в первой половине XIX в., в нем оставался значительный пробел — не хватало строгого математического обоснования понятия действительного числа, не была установлена непрерывность множества действительных чисел. Без этого понятие непрерывности функции несколько «повисало в воздухе». Из него невозможно было получить ряд важных следствий, занимающих первостепенное место в современной математике. Этот пробел был ликвидирован лишь во второй половине XIX в., после того как немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831—1916) была разработана теория вещественных чисел (1872).

Понятие непрерывности базируется на понятии предела функции в точке. А именно, функция считается непрерывной в рассматриваемой точке, если ее значение в этой точке совпадает с ее пределом в данной точке. Это естественное уточнение интуитивного понятия непрерывности[1]. Действительно, если при приближении аргумента к предельной точке x_0 значение функции стремится к числу $a = f(x_0)$, то для того, чтобы довести линию графика до точки $(x_0, f(x_0))$, карандаш от бумаги отрывать не нужно — линия попадет как раз в указанную точку (рис. 2.11, *а*). Если же значение функции в точке x_0 не совпадает с ее пределом, то карандаш придется оторвать, чтобы перескочить в точку $(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.11, *б*).

Итак, определение непрерывности функции в точке выглядит следующим образом.

Определение 2.10. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

[1] На самом деле такое определение непрерывности функции расширяет интуитивное понимание этого термина, поскольку, например, в соответствии с ним функцию $f(x) = x$, заданную на множестве рациональных чисел, следует считать непрерывной в любой точке области ее определения.

Данное определение можно сформулировать иначе, включая в него в явном виде определение предела функции в точке и учитывая, что теперь ограничение $x \neq x_0$ снимается.

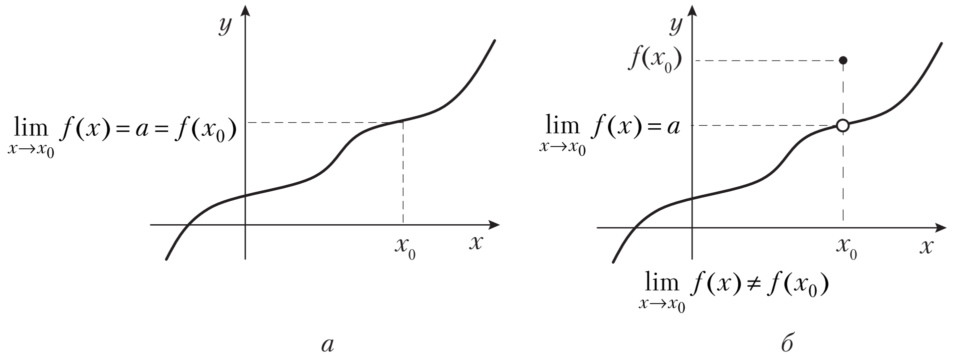


Рис. 2.11. **К определению непрерывности функции**

Определение 2.11. Пусть $x_0 \in D(f)$ — предельная точка области определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ, что при всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 2.12. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если она является предельной для ее области определения $D(f)$ и $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Как следует из определения непрерывности, функция $f(x)$ разрывна в предельной точке x_0 ее области определения, если выполняется какое-либо из условий:

1) $f(x_0)$ не существует (рис. 2.12, *а*, а также рис. 2.7, где $x_0 = -1$);

2) $f(x_0)$ существует, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует (рис. 2.12, *б*);

3) $f(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существуют, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (см. рис. 2.8).

В этих случаях говорят также, что функция $f(x)$ *разрывна в точке* x_0.

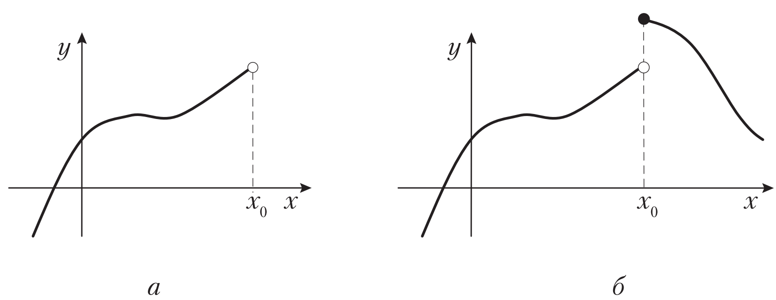


Рис. 2.12. **Точки разрыва**

Из определения 2.12 также следует, что в изолированных точках области определения функции $D(f)$ функция $f(x)$ не является ни непрерывной, ни разрывной. То же самое относится и к внутренним точкам множества $R \setminus D(f)$.

Для непрерывных функций имеет место следующая теорема об арифметических операциях, проистекающая из соответствующих свойств предела функции.

Теорема 2.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, являющейся предельной для $D(f) \cap D(g)$. Тогда их сумма, разность и произведение также непрерывны в этой точке. Если при этом $g(x_0) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывно в этой точке.*

Знание о том, что анализируемая функция является непрерывной, очень важно, поскольку непрерывные функции обладают многими полезными свойствами, о которых речь пойдет ниже. Поэтому хотелось бы установить, какие из часто используемых функций являются непрерывными. Оказывается, что практически все функции, задаваемые аналитическими формулами, непрерывны в области своего определения. Точнее этот результат может быть сформулирован в виде теоремы. Однако прежде нужно определить, что имеется в виду под функциями, задаваемыми аналитическими формулами. Такие функции принято называть элементарными.

Определение 2.13. *Основными элементарными функциями* называются следующие функции:

1) константы: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$;

2) степенные функции: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где

$x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in \mathbb{N}$,

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$,

$x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ при $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$,

$x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ нри $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$;

3) радикалы:

$f(x) = \sqrt[2n]{x}$, где $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, где $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

4) показательные функции: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;

5) логарифмические функции: $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

6) тригонометрические функции:

$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

7) обратные тригонометрические функции:

$f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$,

$f(x) = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$,

$f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 2.14. *Элементарными функциями* называются все основные элементарные функции, а также функции, полученные в результате применении к ним (а также к получающимся из них) конечного числа арифметических операций (сложепия, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций[1].

Замечание 2.4. Можно доказать, что область определения любой элементарной функции состоит из конечной совокупности непересекающихся промежутков и (или) изолированных точек.

Для элементарных функций справедлива следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема 2.4. ***Все элементарные функции непрерывны во всех точках своей области определения, не являющихся изолированными.***

Пример 2.18

Найдем множество точек, в которых функция $f(x)=\sqrt{\log_2 \frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}}$ непрерывна, а также точки ее разрыва.

Решение. Посмотрим, является ли эта функция элементарной, т.е. может ли она быть представлена как результат применения арифметических операций и суперпозиций к основным элементарным функциям. Очевидно, что функция $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}$ может быть получена из степенных функций и констант с помощью операций сложения, вычитания и деления. Функция $h(x)=\log_2 \frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}$ может быть представлена в виде суперпозиции функций $\log_2 x$ и $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}$: $h(x)=\log_2 g(x)$. Функция $f(x)=\sqrt{\log_2 \frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}}$ теперь может быть представлена в виде суперпозиции функций $f(x)=\sqrt{x}$ и $h(x)=\log_2 g(x)$: $f(x)=\sqrt{h(x)}$. Таким образом, функция $f(x)$ является элементарной.

Найдем область определения функции $f(x)$. Так как под знаком квадратного корня должно стоять неотрицательное выражение, имеем условие $\log_2 \frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2} \geq 0$, откуда получаем $\frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2} \geq 1$, или

$$\frac{x^2+x-6-(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-8}{x^2+3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup (-2;-1).$$

Из теоремы 2.4 следует, что на своей области определения, т.е. на множестве $(-\infty;-4] \cup (-2;-1)$, функция $f(x)=\sqrt{\log_2 \frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}}$ непрерывна.

Значит, точками разрыва могут быть только предельные точки области ее определения, в нее не входящие. Таких точек в данном случае две: $x=-2$ и $x=-1$.

Пример 2.19

Найдем множество точек, в которых функция $f(x)=\sqrt{\sin^2 x-1}$ непрерывна, а также точки ее разрыва.

[1] Напомним, что суперпозицией функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $F(x)=f(g(x))$.

Решение. Очевидно, что эта функция также элементарная. Найдем область ее определения.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Поэтому

$$\sin^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

В указанных точках значения функции равны нулю: $f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 2.13).

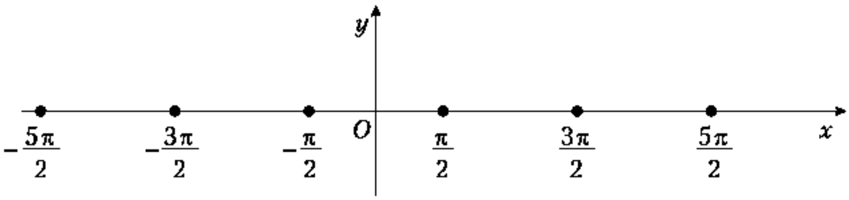


Рис. 2.13. **К примеру 2.19**

Как мы видим, область определения функции состоит из изолированных точек, т.е. точек, в некоторой окрестности которых нет других точек из области определения функции (изолированные точки, как нетрудно понять, не являются предельными). Поэтому точек непрерывности, так же как и точек разрыва, у данной функции нет.

Пример 2.20

Найдем все значения параметра a, при которых функция $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & x \leq 1, \\ x + 2a - 1, & x > 1 \end{cases}$ непрерывна во всех точках.

Решение. Очевидно, что во всех точках $x > 1$ и $x < 1$ функция непрерывна (см. теорему 2.4). Для непрерывности в точке $x = 1$ необходимо и достаточно, чтобы в ней значения выражений $a - x^2$ и $x + 2a - 1$ совпадали, т.е. $a - 1 = 1 + 2a - 1$. Отсюда получим $a = -1$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Изобразите все возможные случаи точек разрыва функции и постройте аналитические примеры.

2. Является ли точка $x = 0$ точкой непрерывности или разрыва следующих функций: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$ и $g(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$?

3. Являются ли точки –4, –3, –2, –1, 0 точками непрерывности или точками разрыва функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$?

4. Можно ли с помощью арифметических операций и суперпозиций над основными элементарными функциями получить выражение с пустой областью определения?

5. Может ли область определения элементарной функции, полученной с помощью арифметических операций над основными элементарными функциями, быть шире (уже), чем у некоторых из этих функций?

6. Может ли область определения элементарной функции, полученной с помощью операции суперпозиции над основными элементарными функциями, быть шире (уже), чем у некоторых из этих функций?

Упражнения

2.5. Пользуясь определением непрерывности функции, докажите, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна на всей числовой прямой.

2.6. Докажите, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x = 0$.

2.7. С использованием теоремы 2.4 докажите, что функция $y = |x|$ непрерывна на всей числовой прямой.

2.8. Найдите множество точек непрерывности функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6}}$ и укажите точки ее разрыва.

2.9. Постройте пример элементарной функции, область определения которой состояла бы: а) из одной точки; б) из двух точек; в) из n точек. Каково множество точек непрерывности и множество точек разрыва этих функций?

2.10. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2, \ x \le a, \\ x + 2a - 3, \ x > a \end{cases}$$

непрерывна во всех точках.

2.11. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{6-2x} - \sqrt[3]{5-3x}}{x+1}, \ x \ne -1, \\ 2 - \dfrac{a}{6}, \ x = -1 \end{cases}$$

непрерывна во всех точках.

2.12*. Исследуйте на непрерывность функцию Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число}, \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$$

2.13*. Исследуйте на непрерывность функцию Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число}, \\ \dfrac{1}{q}, \text{ если } x = \dfrac{p}{q} \text{ — рациональное число}, \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где дробь $\dfrac{p}{q}$ берется несократимой.

2.3. Свойства непрерывных функций

Непрерывные функции обладают рядом замечательных свойств, на основе которых, в частности, разработаны методы решения большого класса уравнений и неравенств, а также задач оптимизации. Для построения теории непрерывных функций, изучения их свойств важную роль играет понятие ***непрерывности функции на множестве***. В качестве таких множеств нас будут интересовать, в первую очередь, отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Казалось бы, непрерывность функции на множестве A можно определить как непрерывность в каждой точке этого множества. На самом деле так она и определяется, однако с некоторой оговоркой — здесь имеется одна тонкость. Рассмотрим примеры двух функций (рис. 2.14).

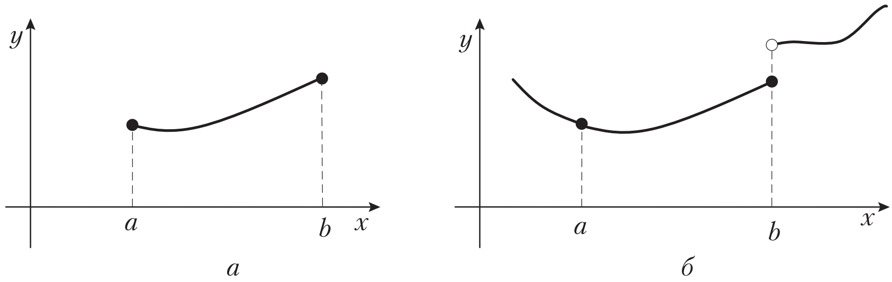


Рис. 2.14. **К непрерывности функции на множестве**

Функция, график которой изображен на рис. 2.14, *а*, задана только на отрезке $[a;\ b]$ и непрерывна в каждой его точке, в том числе и на его концах. Функция же, график которой изображен на рис. 2.14, *б*, задана на более широком множестве, включающем отрезок $[a;\ b]$, и в правом конце отрезка (в точке $x = b$) разрывна. Таким образом, в соответствии с предложенным определением первую функцию следует считать непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, а вторую — нет. Однако для упомянутой выше теории интерес представляет только отрезок $[a;\ b]$, и не важно, определена ли функция вне его или нет. В таком случае ситуации *а* и *б* неразличимы, т.е. следует считать и вторую функцию (на рис. 2.14, *б*) непрерывной на отрезке $[a;\ b]$. Отсюда следует, что в приведенном выше определении непрерывности функции на множестве необходимо сделать оговорку, что функция задана на множестве A или же, что так (условно) считается, т.е. функция вне множества A не задана.

Для нашего случая, когда рассматриваются только промежутки, можно поступить иначе, а именно, для концов промежутков сформулировать специальные требования относительно непрерывности. Так, для определения непрерывности функции на отрезке и полуинтервале нам придется расширить понятие предела и ввести понятие одностороннего предела в точке. Для определения же непрерывности на интервале никаких оговорок не требуется.

Определение 2.15. Функция называется *непрерывной на интервале* $(a;\ b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Введем понятия односторонних пределов.

Определение 2.16. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(x_0;\ a)$ (или на некотором множестве D, содержащем этот интервал). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Аналогично вводится понятие предела функции $f(x)$ в точке x_0 слева.

Определение 2.17. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; x_0)$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *слева*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, будет выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Теперь можно ввести понятия непрерывности функции в точке справа и слева.

Определение 2.18. Говорят, что функция f *непрерывна в точке* x_0 *справа*, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2.19. Говорят, что функция f *непрерывна в точке* x_0 *слева*, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2.20. Говорят, что функция f *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Аналогично вводятся понятия непрерывности функции f на полуинтервалах.

Так, например, функция, график которой изображен на рис. 2.15, непрерывна на промежутках [0; 1); [1; 2]; (2; 3] (но, конечно, не на их объединении!). Эта функция разрывна в точках $x = 1$ и $x = 2$. Вместе с тем мы можем говорить о непрерывности функции справа в точках $x = 1$ и $x = 0$ и о непрерывности слева в точках $x = 2$ и $x = 3$.

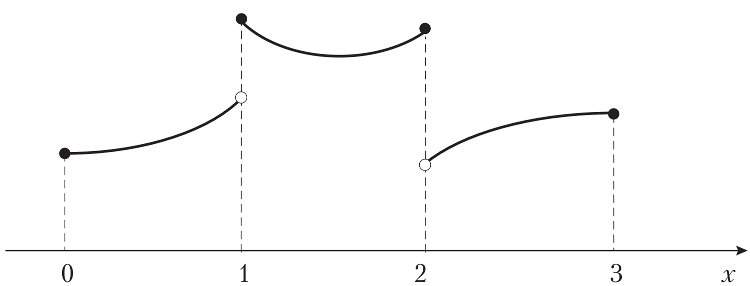


Рис. 2.15. **К непрерывности слева и справа**

Рассмотрим некоторые из свойств функций, непрерывных на промежутках.

Теорема 2.5 (Больцано — Коши). *Пусть функция* $f(x)$ *задана и непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на этом отрезке существует точка* (*возможно, и не одна*), *в которой функция обращается в нуль* (рис. 2.16).

Данная теорема вполне соответствует интуитивному представлению о непрерывных функциях. Действительно, пусть мы хотим нарисовать график непрерывной функции, причем начальная и конечная точки графика лежат по разные стороны от оси Ox. Тогда, чтобы попасть из начальной точки в конечную, не отрывая карандаша от бумаги, мы должны где-то пересечь ось Ox.

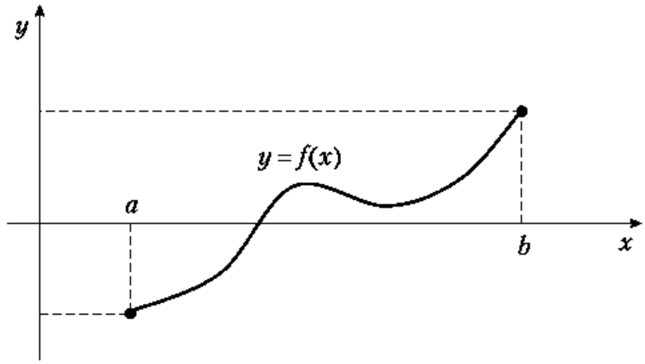


Рис. 2.16. **К теореме 2.5**

Здесь как раз отчетливо проявляется тот пробел, который мешал развитию теории непрерывных функций, пока не была создана теория действительных чисел. В самом деле, если бы нам были известны только рациональные числа, то мы спокойно могли бы перейти из области отрицательных чисел в область положительных, «просочившись», например, через точку $x = \sqrt{2}$ (которую мы за число не считаем), скажем, рассматривая функцию $f(x) = x^2 - 2$ на отрезке $[1; 2]$. Для множества действительных чисел этот номер не пройдет, поскольку действительные числа заполняют всю ось Ox без промежутков — каждой точке оси Ox соответствует некоторое действительное число.

На основе теоремы Больцано — Коши можно находить приближенное решение уравнения, когда аналитически решить его не удается. В этом случае можно применить метод деления отрезка пополам.

Пусть имеем уравнение $f(x) = 0$, причем $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$, функция $f(x)$ непрерывна и из каких-то соображений известно, что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ обращается в нуль только один раз. Тогда разделим отрезок $[a; b]$ пополам, обозначим середину буквой c и найдем значение $f(c)$. Если $f(c) = 0$, то решение уже найдено. Если $f(c) < 0$, то на основании теоремы Больцано — Коши решение должно содержаться на отрезке $[c; b]$. Если $f(c) > 0$, то решение должно находиться на отрезке $[a, c]$ (рис. 2.17). Таким образом, мы вдвое сузили область поиска решения. Этот процесс можно повторить еще раз, опять уменьшив вдвое длину отрезка, на котором содержится искомое решение. Процесс последовательного деления отрезка пополам следует закончить, когда на каком-то этапе либо найдется точное решение, либо длина отрезка станет настолько малой, что за приближенное решение можно взять любую его точку. При этом погрешность решения не будет превосходить длины отрезка. Такой алгоритм нахождения решения уравнения легко реализуется с помощью компьютера.

Из теоремы Больцано — Коши следует, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа M, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in (a; b)$, такая что $f(c) = M$.

Для доказательства достаточно применить теорему Больцано — Коши к функции $g(x) = f(x) - M$. Иногда это следствие также называют теоремой Больцано — Коши.

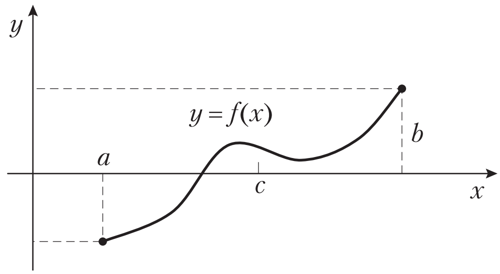


Рис. 2.17. **К методу деления отрезка пополам**

Теорема 2.6 (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения* (рис. 2.18).

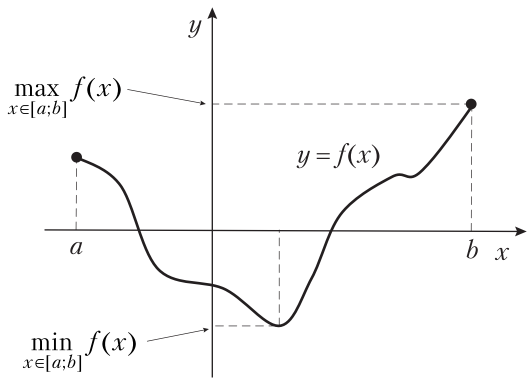


Рис. 2.18. **К теореме 2.6**

Теорема Вейерштрасса имеет важное значение для теории принятия оптимальных решений, связанных с нахождением наибольшего или наименьшего значения так называемой целевой функции, поскольку гарантирует наличие решения задачи оптимизации.

Заметим, что в этой теореме существенны замкнутость и ограниченность отрезка. Если бы мы вместо отрезка взяли интервал (или полуинтервал) или неограниченное множество, то теорема перестала бы быть верной (рис. 2.19).

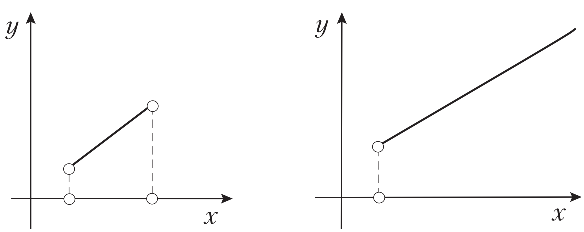


Рис. 2.19. **Неверность теоремы 2.6 на интервале и полуинтервале**

Теорема 2.7. *Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$ и не обращается на этом интервале в нуль, то она принимает на этом интервале значения постоянного знака (либо только положительные, либо только отрицательные).*

Доказательство. Допустим противное, т.е. что на интервале $(a;\ b)$ есть две точки a_1 и b_1, $a_1 < b_1$, в которых функция принимает разные знаки. Тогда по теореме Больцано — Коши на отрезке $[a_1;\ b_1]$ найдется точка, в которой функция принимает нулевое значение. Получили противоречие, что и доказывает теорему. ■

Данная теорема важна для решения неравенств так называемым методом интервалов, а также для исследования функций и построения их графиков.

Пусть нужно определить множества точек, на которых функция принимает положительные и отрицательные значения. Поступим следующим образом.

1. Найдем область определения функции $D(f)$.
2. Найдем точки разрыва функции.
3. Найдем нули функции, т.е. все точки x, где $f(x) = 0$.
4. На числовой прямой изобразим область определения функции (жирной чертой) и точки, в которых функция разрывна (белыми кружочками) или обращается в нуль (черными кружочками).

Тем самым область определения функции разобьется на интервалы, заключенные между выделенными точками, на каждом из которых функция будет непрерывной и не обращается в нуль. На основании приведенной выше теоремы на каждом из указанных интервалов функция будет иметь значения постоянного знака. Какой знак именно, можно определить по так называемым пробным точкам.

5. В каждом образовавшемся интервале выбираем произвольную точку и находим знак значения функции в ней — такой знак будет и во всех точках данного интервала.

Пример 2.21

Определим интервалы знакопостоянства функции $f(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)\sqrt{6-x}}{x^2-3x-10}$.

Решение. Преобразуем выражение функции, разложив на множители многочлены второй степени: $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)\sqrt{6-x}}{(x+2)(x-5)}$.

Находим область определения функции: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;5)\cup(5;6]$. Точки разрыва: $x=-2$, $x=5$. В области определения точек разрыва функция не имеет, так как это элементарная функция.

Находим нули функции: $x\in\{-1;3;6\}$.

На числовую прямую наносим область определения (выделена жирной линией), точки разрыва (белыми кружочками) и нули функции (черными кружочками). Затем по пробным точкам определяем знак значений функции в каждой области (рис. 2.20).

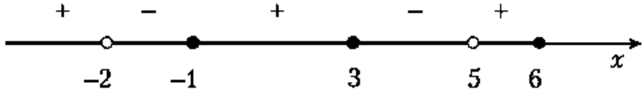


Рис. 2.20. **К примеру 2.21**

Пример 2.22

Решим неравенство $x^2 - 11x \cdot 3^{2-x} + 6 \cdot 3^{5-2x} \le 0$.

Решение. Заменим $t = 3^{2-x}$. Неравенство принимает вид

$$x^2 - 11tx + 18t^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2t)(x-9t) \le 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} - 3^{2-x}\right)\left(\frac{x}{9} - 3^{2-x}\right) \le 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 3^{2-x}\right)\left(\frac{x}{9} - 3^{2-x}\right)$. Ее область определения $D(f) = \mathbb{R}$. Найдем ее нули:

1) $\frac{x}{2} - 3^{2-x} = 0$. Функция $g(x) = \frac{x}{2} - 3^{2-x}$ непрерывна на всей числовой прямой и возрастает. Следовательно, каждое свое значение она принимает только в одной точке. В частности, нулевое значение она принимает в точке $x = 2$ (определяется подбором);

2) $\frac{x}{9} - 3^{2-x} = 0$. Аналогично находим второй нуль функции $f(x)$: $x = 3$.

На каждом из интервалов $(-\infty; 2)$; $(2; 3)$; $(3; \infty)$ в силу непрерывности и отсутствия нулей функция $f(x)$ сохраняет знак. Исследуем знаки функции на этих интервалах:

$$x \in (-\infty; 2):\ f(-5) = \left(\frac{-5}{2} - 3^7\right)\left(\frac{-5}{9} - 3^7\right) > 0;$$

$$x \in (2; 3):\ f(2{,}5) = \left(\frac{5}{4} - 3^{-0{,}5}\right)\left(\frac{5}{18} - 3^{-0{,}5}\right) < 0;$$

$$x \in (3; \infty):\ f(5) = \left(\frac{5}{2} - 3^{-3}\right)\left(\frac{5}{9} - 3^{-3}\right) > 0.$$

Ответ: [2; 3].

Пример 2.23

Решим неравенство $\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \ge 2$.

Решение. Имеем $\frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \ge 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x}$.

Ее область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2]$.

Найдем нули функции:

$$\sqrt{2-x} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 9 - 12x + 4x^2, \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (0; 2], \\ 3 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 11x + 7 = 0, \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (0; 2], \\ 3 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

На своей области определения функция $f(x)$ обращается в нуль ровно один раз, при $x = 1$. Эта точка делит $D(f)$ на промежутки. На каждом из промежутков функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Исследуем знаки функции на каждом из промежутков:

$$x \in (-\infty; 0):\ f(-2) = \frac{2 - 4 - 3}{-2} > 0;$$

$$x \in (0; 1):\ f(0{,}5) = \frac{\sqrt{1{,}5} + 1 - 3}{0.5} < 0;$$

$$x \in (1;2]\colon f(2) = \frac{0+4-3}{2} > 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ 2]$.

Пример 2.24

Решим неравенство $\sqrt{9-\frac{3}{x}} < 3x - \sqrt{3x-\frac{3}{x}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{9-\frac{3}{x}} - 3x + \sqrt{3x-\frac{3}{x}}$.

Ее область определения

$$\begin{cases} 9-\frac{3}{x} \ge 0, \\ 3x-\frac{3}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{x} \ge 0, \\ \frac{x^2-1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{x} \ge 0, \\ \frac{x^2-1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;0) \cup [1;\infty).$$

Исходное неравенство можно переписать в виде $3x > \sqrt{9-\frac{3}{x}} + \sqrt{3x-\frac{3}{x}}$. Отсюда имеем $x > 0$, что совместно с областью определения дает $x \in [1;\infty)$.

Найдем нули функции $f(x)$:

$$3x - \sqrt{9-\frac{3}{x}} = \sqrt{3x-\frac{3}{x}} \Rightarrow 9x^2 + 9 - \frac{3}{x} - 6x\sqrt{9-\frac{3}{x}} = 3x - \frac{3}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 3x + 9 - 6x\sqrt{9-\frac{3}{x}} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 3x + 9 - 6\sqrt{9x^2-3x} = 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{9x^2-3x}$. Тогда

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \sqrt{9x^2-3x} = 3 \Leftrightarrow 9x^2 - 3x = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{1+\sqrt{37}}{6}.$$

Проверкой убеждаемся, что этот корень удовлетворяет исходному уравнению.

Выясним знаки функции на межкорневых промежутках:

1) $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$: $f(1) = \sqrt{6} - 3 < 0$;

2) $x \in \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6}; \infty\right)$: $f(3) = 2\sqrt{8} - 9 < 0$.

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{37}}{6}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6}; \infty\right)$.

Для монотонных функций справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$. Тогда:*

1) *множество ее значений совпадает с отрезком $[f(a); f(b)]$ (для убывающей — с отрезком $[f(b); f(a)]$);*

2) *$f(x)$ имеет обратную функцию $x = g(y)$, которая задана на отрезке $[f(a); f(b)]$ (для убывающей — на отрезке $[f(b); f(a)]$), непрерывна и воз-*

растает (убывает) на нем, а множество ее значений совпадает с отрезком $[a; b]$[1].

Эта теорема может быть использована для нахождения множества значений монотонной функции. Так, если функция монотонна и непрерывна, для нахождения множества ее значений на отрезке достаточно найти всего два значения — в концах этого отрезка, поскольку множество ее значений совпадает с множеством чисел от меньшего из этих двух значений до большего.

Кроме того, данная теорема гарантирует существование и непрерывность обратной функции, а также указывает множество ее значений.

Пример 2.25

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^5 + 2x^3 + x$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Сумма трех возрастающих функций является возрастающей функцией. Следовательно, наименьшее значение функция достигает в точке $x = -2$, а наибольшее — в точке $x = 2$: $f_{\min} = f(-2) = -64 - 16 - 2 = -82$; $f_{\max} = f(2) = 64 + 16 + 2 = 82$.

Пример 2.26

Найдем множество значений функции $f(x) = \sin x$ на промежутках: а) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. а) Функция $f(x) = \sin x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ монотонно возрастает. Поскольку $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то множество значений функции — интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

б) На отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ функция уже не является монотонной. На отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right]$ она монотонно убывает до значения $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, а затем монотонно возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$ и принимает наибольшее значение $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на правом конце.

Следовательно, множество значений функции — отрезок $\left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Пример 2.27

Найдем множество значений функции $y = 2\sin^2 x - \cos x - 1$.

Решение. Сделаем замену $\cos x = t$. Тогда $y = 2(1 - t^2) - t - 1 = -2t^2 - t + 1$, где $t \in [-1; 1]$.

Ветви параболы $y = -2t^2 - t + 1$ направлены вниз. Найдем координаты вершины параболы: $t_в = -\frac{1}{4}$ (рис. 2.21). Поскольку вершина принадлежит промежутку $[-1; 1]$, наибольшее значение достигается в вершине:

[1] Теорема справедлива также для интервала $(a; b)$ и полуинтервалов $(a; b]$ или $[a; b)$.

$$t_{\text{в}} = -\frac{1}{4};\ y_{\text{в}} = y\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{8}.$$

Наименьшее значение достигается в точке $t = 1$ — она наиболее удалена от абсциссы вершины: $y(1) = -2 - 1 + 1 = -2$ (см. рис. 2.21).

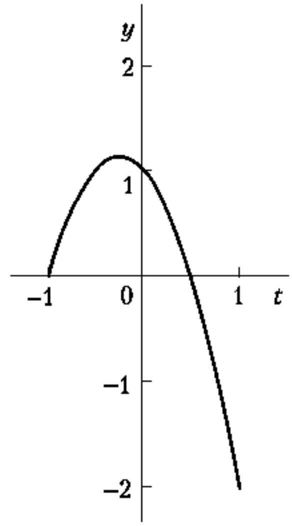


Рис. 2.21. **К примеру 2.27**

Функция непрерывна на всей числовой прямой и по теореме Больцано — Коши принимает все промежуточные значения.

Ответ: $E(y) = \left[-2; \frac{9}{8}\right]$.

Пример 2.28

Найдем все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

непрерывна во всех точках своей области определения.

Решение. Область определения функции — $D(f) = \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$. Очевидно, что во всех внутренних точках функция непрерывна (см. теорему 2.4). В точке $x = -\frac{1}{3}$ функция также непрерывна, поскольку

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}+0} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-x} = \frac{\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}+0}(2-\sqrt{3x+1})}{\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}+0}(1-x)} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2} = f\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Для непрерывности функции в точке $x = 1$ требуется выполнение условия $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-x} = f(1) = a$. Имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(2-\sqrt{3x+1})(2+\sqrt{3x+1})}{(2+\sqrt{3x+1})(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4-(3x+1)}{(2+\sqrt{3x+1})(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3-3x}{(2+\sqrt{3x+1})(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{2+\sqrt{3x+1}}=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, функция непрерывна в точке $x = 1$ при $a=\frac{3}{4}$.

Пример 2.29

Докажем, что система уравнений

$$\begin{cases}16x^3+40x^2+29x+6=0,\\ \log_{13+4x}\left(5y+10+\dfrac{3}{x}\right)-7=y(5+12x)+\sqrt{\dfrac{9}{x}-8x(2x+1)+15}\cdot\log_7 y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Сделаем одно вводное замечание. Когда мы имеем дело со сложной задачей, обычно не сразу ясно, как к ней подступиться. В результате предварительного беглого анализа структуры задачи, как правило, возникает несколько предположений о путях ее решения. Однако не всегда ясно, к чему приведет тот или иной путь и приведет ли он к цели. Тогда приходится пробовать различные подходы и оценивать промежуточные результаты: приближают ли они к решению или удаляют от него, упрощают ли они задачу или усложняют, запутывают ее. В этом деле помогают математический опыт и интуиция. Если видно, что на выбранном пути получаются громоздкие вычисления, следует опробовать другой путь, если таковой имеется в запасе.

Итак, проведем предварительный анализ структуры задачи. Перед нами система двух уравнений с двумя неизвестными, причем первое уравнение содержит только одну неизвестную, а второе — обе. Сразу возникает предположение о пути решения: найти корни первого уравнения и подставить во второе. Этот путь, очевидно, должен привести к цели. Оценим, как можно решить первое уравнение. Это уравнение третьей степени с целыми коэффициентами. Стандартный способ его решения — подстановка всевозможных дробей вида $x=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, где p является делителем свободного члена (6), а q — делителем старшего коэффициента (16). Если уравнение имеет рациональные корни, то, подставив всевозможные такие дроби, мы найдем решение. При этом достаточно найти одно (x_0), затем, разделив многочлен на $x - x_0$, получим квадратное уравнение и с помощью дискриминанта определим остальные корни.

Перебор корней можно сократить, заметив, что корни уравнения должны быть отрицательными, так как при подстановке неотрицательных значений в левую часть мы получим положительное число, а не нуль. Но все равно для анализа остается довольно много кандидатов: $-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{3}{8},\ -\frac{1}{16},\ -\frac{3}{16}$.

Можно, конечно, начинать подставлять все эти числа до первого успеха. И может быть, повезет, и достаточно быстро мы найдем нужный корень. Если же процесс вычислений затягивается, можно поискать другие пути решения.

Посмотрим на второе уравнение. Там под корнем стоит выражение, содержащее только одну переменную x. Выражение под корнем должно быть неотрицательным. Из этого условия мы можем сузить область допустимых значений x. Может быть, это поможет найти корень первого уравнения?

Итак, решим неравенство

$$\frac{9}{x}-8x(2x+1)+15\geq 0.$$

После преобразования получим

$$\frac{16x^3+8x^2-15x-9}{x}\leq 0.$$

Один корень многочлена, стоящего в числителе, находится легко: это $x = 1$. Остальные корни находятся, как описано выше, — после деления многочлена на $x-1$.

Разложив многочлен на множители, придем к неравенству

$$\frac{16(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}{x}\leq 0,$$

откуда получим ограничения на x: $x\in\left\{-\frac{3}{4}\right\}\cup(0;1]$.

Это ограничение поможет найти корень первого уравнения. Действительно, как мы уже установили, положительных корней оно не имеет. Значит, если оно вообще имеет корни, то это может быть только $x=-\frac{3}{4}$. Подстановкой убеждаемся, что $x=-\frac{3}{4}$ — корень первого уравнения. Другие его корни нас уже не интересуют, поскольку если они и есть, то в область допустимых значений (ОДЗ) они не входят.

Итак, если система имеет решение (x_0, y_0), то $x_0=-\frac{3}{4}$. Подставив $x=-\frac{3}{4}$ во второе уравнение и перенеся все в левую часть, получим уравнение

$$\lg(5y+6)+4y-7=0.$$

Конечно, аналитического решения это уравнение не имеет — оно так называемое трансцендентное, причем не принадлежит к тем частным случаям, когда можно применить специальные приемы. Однако в условии задачи и не требуется отыскать решение системы, а только установить его существование и единственность. А это можно сделать, используя теорему Больцано — Коши.

Действительно, функция $f(y)=\lg(5y+6)+4y-7$ строго возрастает, поэтому каждое свое значение, в частности нуль, она может принимать не более одного раза, т.е. если уравнение имеет решение, то оно единственно. Покажем, что решение есть. Для этого достаточно найти такой отрезок $[y_1; y_2]$, что $f(y_1) < 0$ и $f(y_2) > 0$. Тогда ввиду непрерывности функции $f(y)$ по теореме Больцано — Коши будет следовать существование такой точки $y \in [y_1; y_2]$, что $f(y) = 0$. В качестве таких точек можно взять, например, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$: $f(0) = \lg 6 - 7 < 0$, $f(2) = \lg 16 + 1 > 0$.

Приведенные выше рассуждения демонстрируют «кухню» математика, показывают, как можно было прийти к решению задачи. Они не являются образцом оформления решения, хотя некоторые элементы и войдут в него. В решении, в частности, вовсе не обязательно показывать, как вы нашли корень первого уравнения, — достаточно указать, что $x=-\frac{3}{4}$ — это корень, доказав этот факт подстановкой. Конечно, показать, что других корней в ОДЗ задачи первое уравнение не имеет, необходимо.

Примерный образец решения может выглядеть следующим образом (промежуточные вычисления опущены — в решении они должны присутствовать, чтобы проверяющий был уверен, что вы все это проделали сами).

Решение

$$\begin{cases}16x^3+40x^2+29x+6=0, & (1)\\ \log_{13+4x}\left(5y+10+\frac{3}{x}\right)-7=y(5+12x)+\sqrt{\frac{9}{x}-8x(2x+1)+15}\cdot\log_7 y & (2)\end{cases}$$

Из уравнения (2) следует, что $\frac{9}{x}-8x(2x+1)+15\geq 0$. Решая это неравенство, получим (промежуточные вычисления опущены) $x\in\left\{-\frac{3}{4}\right\}\cup(0;1]$.

$x=-\frac{3}{4}$ — корень уравнения (1) (далее следует обоснование подстановкой его в уравнение). Других корней в ОДЗ уравнение (1) не имеет, так как иначе они должны были бы содержаться в полуинтервале (0; 1], а положительных корней уравнение (1) не имеет (левая часть уравнения — сумма положительных членов).

После подстановки корня $x=-\frac{3}{4}$ в уравнение (2) получим следующее уравнение:

$$\lg(5y+6)+4y-7=0. \tag{3}$$

Обозначим $f(y)=\lg(5y+6)+4y-7$. Эта функция строго возрастающая как суперпозиция и сумма возрастающих функций. Поэтому каждое свое значение, в частности нуль, она может принимать не более одного раза, а значит, уравнение (3) может иметь не более одного решения.

Функция $f(y)$ непрерывна в области определения $y\in\left(-\frac{6}{5};+\infty\right)$ как элементарная функция. На концах отрезка [0; 2] функция $f(y)$ принимает значения разных знаков: $f(0)=\lg 6-7<0, f(2)=\lg 16+1>0$. Таким образом, на основании теоремы Больцано — Коши отсюда следует, что на отрезке [0;2] существует точка y_0, в которой $f(y_0)=0$.

Из сказанного следует, что уравнение (3) имеет единственное решение y_0. Таким образом, система (1), (2) имеет единственное решение $\left(-\frac{3}{4};y_0\right)$, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Дайте определение функции, непрерывной: а) в точке; б) на интервале; в) на отрезке.
2. Что такое точка разрыва?
3. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
4. Приведите пример двух разрывных функций, таких что их сумма (разность, произведение, частное) — непрерывная функция.
5. Может ли функция иметь различные конечные пределы слева и справа?
6. Может ли функция быть непрерывной слева и справа и иметь различные пределы слева и справа?
7. Будет ли функция непрерывной в точке, если она в ней непрерывна слева и справа?
8. Может ли функция быть разрывна в точке, если она в ней непрерывна слева?
9. Может ли функция, заданная на всей числовой прямой, быть непрерывной на отрезке [0; 1] и разрывной в конце отрезка?
10. Почему в теореме Больцано — Коши требуется непрерывность функции?
11. Будет ли справедлив вывод теоремы Вейерштрасса, если отказаться от условия непрерывности функции?
12. Будет ли справедлива теоерма 2.7, если интервал $(a;\ b)$ заменить отрезком $[a;\ b]$?
13. Останется ли справедливым вывод теоремы 2.8 относительно множества значений функции, если отказаться от условия: а) непрерывности; б) монотонности?

Упражнения

2.14. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2-2x-1$ на отрезке [0; 3].

2.15. Найдите множества значений функций:

а) $y=\sin x,\ x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$; б) $y=\cos x,\ x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$; в) $y=\sin x,\ x\in\left(\frac{\pi}{4};1\right]$;

г) $y=\sin x,\ x\in\left[\frac{\pi}{4};2\right]$; д) $y=\sin\frac{\pi}{x},\ x\in[2;4)$; е) $y=\cos\frac{x}{x+1},\ x\in[0;+\infty)$;

ж) $y=e^{-x^2}$; з) $y=\ln(x^2-3x+2),\ x\in(2;+\infty)$; и) $y=\log_2(2x^2-x+4),\ x\in[0;1]$;

к) $y=\frac{4}{\sin x-2}$; л) $y=\frac{1}{2\sin x-1}$.

2.16. Найдите наибольшее и наименьшее значения параметра b, при которых уравнение $\frac{1}{\cos x+2}=b$ имеет решение.

2.17. Определите интервалы знакопостоянства функции

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{\sqrt{4-x}(x^2-6x+10)}$$

и знаки функции на этих интервалах.

2.18. Решите неравенства:

а) $\frac{3}{x^2-6x+5}<0$; б) $\frac{1}{x-1}<\frac{1}{x+1}$; в) $\frac{x^4-20x^2+64}{(x^2-9)^2}\le 0$;

г) $\frac{(25-x^2)(x^2+5x+6)(x^2+x-2)(1-x)^2}{x+3}>0$; д) $\frac{(x^2-10x+24)\sqrt{(x+3)(7-x)}}{x^2-5x+6}\le 0$;

е) $\sqrt{\frac{13-x}{x+5}}\cdot\sqrt{\frac{x-6}{x-2}}\cdot\frac{(x^2-11x+24)(x^2-7x-8)}{x^2-6x-40}\ge 0$; ж) $\sqrt{x+3}\cdot\ln(x^2+3x+2)>0$;

з) $\frac{(2^x-3x-1)(x^2-7x+12)}{\ln(x^2-2x-24)}\ge 0$; и) $(x^2-12x+30)^2-x^2+12x-72\ge 0$;

к) $x^4-7x^3+12x^2-7x+1<0$; л) $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}\le 6$;

м) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}\le x^2-4x+6$; н) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$;

о) $\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0$; п) $x^2-11x\cdot 3^{2-x}+6\cdot 3^{5-2x}\le 0$;

р) $\frac{(|x|-2)(|x-2|-|x+3|)}{x^2-5x}\ge 0$; с) $\frac{(|x|-2)(\sqrt{x^2+x}-|3-x|)}{x^2-5x}\ge 0$;

т) $\frac{(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x-3})}{(x^2-5x)(|x|-|3-x|)}\ge 0$; у) $\frac{2x-1+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{4-3x}-2}\le 0$; ф) $\sqrt{x+6}-1\ge\sqrt[3]{23-5x}$;

х) $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1}\le x$.

2.19. Найдите область определения функции $\sqrt{1-\log_{2x}(x^2-5x+6)}$.

2.20*. При каждом значении параметра a решите неравенство $2^{4x}+(x-4-a)\cdot 2^{2x}+{}$ $+(5a+x-5-ax)\ge 0$.

2.21*. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}9x^3+18x^2+17x+20=0,\\ 2+(3x+10)^{y-1}\left(y+2+\dfrac{5}{x}\right)=y+11^{x-2y}\cdot\sqrt{9x^2(x+4)+3(x+7)^2+13x-122}\end{cases}$$

не имеет решений.

2.22*. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}3x^3+13x^2+20x+14=0,\\ (6x+17)^y-5=\dfrac{7y}{x}+2^{x+y}\cdot\sqrt{9x(x+3)^2-3x^2+10x+49}\end{cases}$$

имеет единственное решение.

2.23*. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}8x^3+18x^2+15x+14=0,\\ (10+4x)^y-2=y\left(5+\dfrac{7}{x}\right)+7^{x+y}\cdot\sqrt{16x(x+1)^2+40x^2+89x+49}\end{cases}$$

имеет хотя бы два решения.

2.24*. Найдите все корни уравнения $6x^3+28x^2+39x+15=0$, при подстановке каждого из которых в уравнение

$$5\log_{10+3x}\left(y+8+\frac{5}{x}\right)-3=\frac{(13+6x)y}{4}+\sqrt{\frac{25}{x}-3x(7+3x)+5}\cdot\ln(y+5)$$

получится уравнение относительно y, имеющее более одного корня.

2.25*. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и множество значений этой функции — такой же отрезок $[a; b]$. Докажите, что на этом отрезке существует хотя бы одна такая точка x, для которой $f(x) = x$. Дайте графическую интерпретацию этого факта.

2.26*. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)=\sqrt{(x+1)^2(4x-x^2-3)}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

2.4. Предел функции в бесконечности

До сих пор мы имели дело с пределом функции в точке. Однако во многих приложениях представляет интерес вопрос о так называемом асимптотическом поведении функции, т.е. о характере ее изменения в бесконечности. Так, многие физические процессы, происходящие в природе и в технических устройствах, имеют некоторую начальную фазу («разбег») и устоявшуюся («насыщение»). Таковы, например, процессы наполнения водоема со стоком, работы двигателя после его включения, зарядки конденсатора в электрической цепи и т.д. В этих случаях нас интересует вопрос, к чему стремится значение функции, когда ее аргумент стремится к бесконечности. Знание предела функции в бесконечности важно также для построения ее графика.

По аналогии с пределом последовательности, т.е. функции от натурального аргумента, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ можно рассмотреть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, где аргументом уже является не натуральное, а действительное число. Но в данном случае имеется одно отличие: натуральная переменная в определении предела изменяется в одну сторону, в $+\infty$, а действительную переменную можно устремлять в обе стороны — в $+\infty$ или в $-\infty$. Поэтому различают два вида пределов: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Всюду в дальнейшем при рассмотрении пределов в $+\infty$ ($-\infty$), не оговаривая особо, будем предполагать, что область определения функции не ограничена вправо (влево), т.е. для любого наперед заданного числа N в ней существуют точки $x > N$ ($x < N$).

Определение 2.21. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что при всех $x > N$, $x \in D(f)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение 2.22. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что при всех $x < N$, $x \in D(f)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение 2.23. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что при всех x, таких что $|x| > N$, $x \in D(f)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Предел функции в бесконечности может существовать, а может и не существовать. Пример существования предела в $+\infty$ и несуществования в $-\infty$ дает функция $f(x) = 1 - e^{-x}$ (рис. 2.22): $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

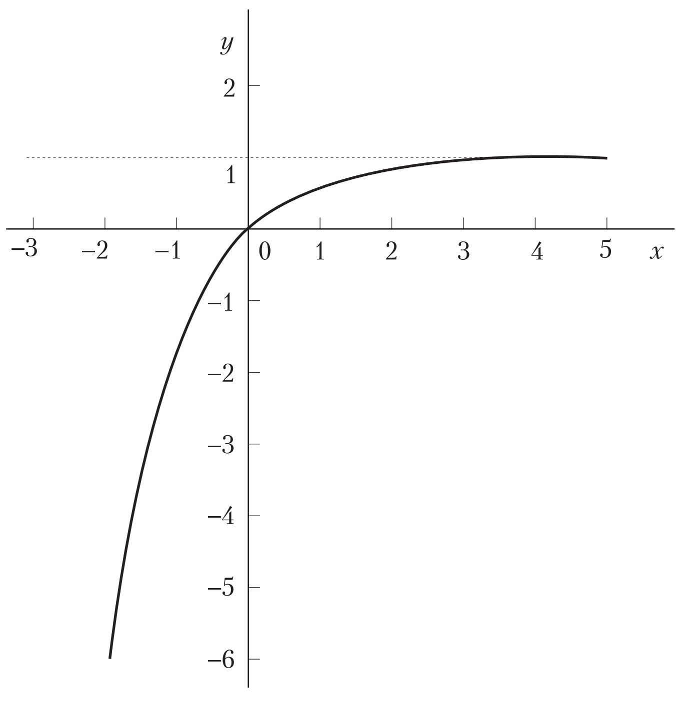


Рис. 2.22. **Функция $f(x) = 1 - e^{-x}$**

Техника доказательства и вычисления пределов в бесконечности такая же, как и для пределов последовательностей.

Пример 2.30

Пользуясь определением предела, докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$.

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$. Для этого в соответствии с определением 2.21 при заданном $\varepsilon>0$ нужно подобрать такое число N, чтобы для любого $x>N$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}-(-1)\right|<\varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}-(-1)\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1-x}{1+x}+1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1-x+1+x}{1+x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2}{1+x}\right|<\varepsilon.$$

Будем выбирать N среди положительных чисел. Тогда последнее неравенство равносильно следующему (при $x>N$, а значит, при $1+x>0$):

$$\frac{2}{1+x}<\varepsilon,\text{ или }\frac{x+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon},\text{ или }x>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Итак, если мы возьмем $N=\frac{2}{\varepsilon}-1$, то для всех $x>N$ требуемое неравенство будет выполнено (поскольку все преобразования были равносильными, то из последнего обратным ходом можно получить первое).

Докажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$. Для этого в соответствии с определением 2.22 при заданном $\varepsilon>0$ нужно подобрать такое число N, чтобы для любого $x<N$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}-(-1)\right|<\varepsilon$.

Преобразовав последнее неравенство как и раньше, получим равносильное ему неравенство $\left|\frac{2}{1+x}\right|<\varepsilon$. Будем выбирать N среди отрицательных чисел, меньших -1. Тогда последнее неравенство равносильно следующему (при $x<N$, а значит, при $1+x<0$):

$$-\frac{2}{1+x}<\varepsilon,\text{ или }\frac{x+1}{2}<-\frac{1}{\varepsilon},\text{ или }x<-\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Итак, если мы возьмем $N=-\frac{2}{\varepsilon}-1$, то для всех $x<N$ требуемое неравенство будет выполнено (поскольку все преобразования были равносильными, то из последнего обратным ходом можно получить первое).

Пример 2.31

Найдем предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-2}$.

Решение. Разделим и числитель, и знаменатель на старший член (x^2) и воспользуемся арифметическими свойствами предела:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}2-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}3-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Укажите, что общего между понятиями предела последовательности и предела функции в бесконечности. Чем они различаются?

2. Пусть функция $y=f(x)$ задана на множестве действительных чисел, $x \in (-\infty,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$. И пусть задана последовательность $a_n=f(n)$. Что можно сказать о пределе этой последовательности?

3. Всегда ли можно утверждать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, $n\in\mathbb{N}$?

Упражнения

2.27. Пользуясь определением 2.21, докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{1+x}=2$.

2.28. Пользуясь определением 2.21, докажите что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ не существует.

2.29. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+5x+2}{2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+3x-4})$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+3x-4})$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{2^x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x$; з) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\sin^2 x-1}$.

2.30. Найдите наименьшее из чисел a, для которых существует такое число b, что при всех $x>b$ значение функции $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+1}$ отличается от a не больше чем на 0,01.

2.31. Плавательный бассейн длиной 25 м, шириной 10 м и глубиной 2 м наполняется водой. Динамика наполнения (зависимость объема воды в бассейне, м^3, от времени, мин) выражается формулой $v(t)=\dfrac{900t^2+300t}{2t^2+8t+10}$, $t\ge 0$. Определите: а) не произойдет ли переполнение бассейна; б) какой уровень воды (высота водяного столба) установится по прошествии достаточно длительного времени.

2.32. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$, если $a_n\cdot b_m\ne 0$ и а) $n=m$; б) $n>m$; в) $n<m$.

2.5*. Бесконечные пределы

До сих пор мы рассматривали в качестве пределов конечные действительные числа. Однако, как мы видели на многих примерах, графики функции могут уходить в бесконечность при стремлении x к бесконечности (например, $f(x)=x$), а также при стремлении переменной x к конечному числу (см. пример гиперболы — рис. 2.7)[1].

Поэтому целесообразно расширить понятие предела путем введения в рассмотрение бесконечных пределов. Но, как мы уже отмечали, беско-

---

[1] До сих пор мы считали, что в этом случае предел не существует.

нечность бывает двух видов: $+\infty$ и $-\infty$. Таким образом, для каждого вида бесконечности нужно дать свое определение, хотя они и очень похожи: два — для стремления x к $+\infty$ и два — для стремления x к $-\infty$. Кроме того, придется отдельно давать определение для бесконечных пределов в конечной точке. Итого получается шесть определений. Поскольку определения аналогичны, чтобы не загромождать изложение, приведем только определения для $+\infty$.

Определение 2.24. Будем говорить, что *предел функции $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ равен $+\infty$*, если для любого числа M найдется такое число N, что для любого $x > N$, $x \in D(f)$, будет выполняться неравенство $f(x) > M$.

Иными словами, значение функции превзойдет любое число M для всех достаточно больших значений аргумента. Записывается это так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Пример 2.32

Найдем пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}$.

Решение. Разделим почленно числитель и знаменатель на x^2:

$$\frac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}=\frac{5x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x^2}}.$$

При стремлении переменной x к $+\infty$ числитель стремится к $+\infty$, а знаменатель — к 2. Значит, вся дробь стремится к $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}=+\infty$.

Если же x стремится к $-\infty$, то дробь стремится к $-\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}=-\infty$.

Покажем, как можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}=+\infty$, строго, исходя из определения. Пусть M задано. Возьмем $N = \max\{M, 1\}$. Пусть $x > N$. Тогда

$$\frac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}=\frac{5x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x^2}}>\frac{2x+3x+0-3}{2-0}>\frac{2M+3-3}{2}=M,$$

т.е. $\dfrac{5x^3+2x-3}{2x^2-1}>M$, что и требовалось доказать.

Поясним цепочку неравенств. Чтобы получить требуемое неравенство, нужно при каждом преобразовании уменьшать (точнее, не увеличивать) исходное выражение. Для этого (с учетом того, что при $x > N \geq 1$ и числитель, и знаменатель положительные) числитель следует уменьшать (не увеличивать), а знаменатель увеличивать (не уменьшать).

Поскольку $x > \max\{M, 1\}$, то $\dfrac{2}{x}>0$, а $-\dfrac{3}{x^2}>-3$. Знаменатель мы увеличили, заменив $-\dfrac{1}{x^2}$ на 0. Наконец, поскольку $x > M$ и $x > 1$, то $2x > 2M$, а $3x > 3$.

Определение 2.25. Пусть x_0 — предельная точка области определения функции $f(x)$. Будем говорить, что *предел функции $f(x)$ при стремлении x*

к x_0 равен $+\infty$, если для любого числа M найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq x_0$, $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $f(x) > M$. Записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Иными словами, для всех точек, достаточно близких к x_0, значение функции будет больше любого наперед заданного числа. Записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Пример 2.33

Найдем предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{(x-2)^2}$.

Решение. При $x \to 2$ числитель дроби стремится к 11, а знаменатель — к 0, оставаясь положительным. Таким образом, дробь стремится к $+\infty$.

Докажем это, исходя из определения.

Пусть M задано. Если $M = 0$, возьмем $\delta = 1$. Тогда при $x \in (1; 3)$ будет

$$\frac{x^2 + 5x - 3}{(x-2)^2} > \frac{1 + 5 - 3}{1} > 0 = M.$$

Если $M \neq 0$, возьмем $\delta = \min\left\{1; \dfrac{1}{\sqrt{|M|}}\right\}$. Тогда при $x \in (2 - \delta; 2 + \delta)$ будет

$$\frac{x^2 + 5x - 3}{(x-2)^2} > \frac{1 + 5 - 3}{\delta^2} = \frac{3}{\delta^2} \geq \frac{3}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{|M|}}\right)^2} = 3|M| > M,$$

что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Сохранится ли определяемое понятие, если в определении 2.24 слова «для любого $x > N$» заменить словами «существует $x > N$»?

2. Дайте определения пределов $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. Почему в примере 2.22 было взято $N = \max\{M, 1\}$, а не просто $N = M$?

4. Почему в примере 2.23 было взято $\delta = \min\left\{1; \dfrac{1}{\sqrt{|M|}}\right\}$, а не просто $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{|M|}}$ или $\delta = 1$?

Упражнения

2.33. Установите, существует ли какой-либо (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$.

2.34. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 1}{x^2 + 5x + 3}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 1}{x^2 + 5x + 3}$.

2.35. Докажите, исходя из определения, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3}{x+1}=-\infty$.

2.36. Докажите, исходя из определения, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$.

2.6*. Односторонние бесконечные пределы

Вернемся к рассмотрению гиперболы на рис. 2.7. В соответствии с определением 2.25 функция $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ при стремлении x к точке $x_0=-1$ предела иметь не будет, поскольку при стремлении x с правой стороны значение функции стремится к $+\infty$, а с левой стороны — к $-\infty$. Однако этот факт также характерен и важен для построения графика функции, и хотелось бы его тоже отразить в определении предела. Поэтому, так же как и для конечных пределов, вводят еще два понятия: бесконечный предел справа (стремление x справа к точке x_0, т.е. рассматриваются только $x>x_0$) и слева (стремление x слева к точке x_0, т.е. рассматриваются только $x<x_0$), и записывается это соответственно так: $x\to x_0+0$ и $x\to x_0-0$. Окончательно запись одностороннего предела для указанного примера выглядит таким образом: $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=-\infty$. Если $x_0=0$, то точку x_0 не указывают и пишут сокращенно $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$, соответственно $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$.

Пример 2.34

Установим существование односторонних пределов: а) $\lim\limits_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Прикидка: при $x\to+0$ величина $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, а значит, и $2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$.

Таким образом, надо доказать, что для любого числа M найдется такое число $\delta>0$, что при всех x, таких что $0<x<\delta$, будет выполняться неравенство $2^{\frac{1}{x}}>M$.

Для неположительных M неравенство очевидно. Если $M>0$, возьмем $\delta=\dfrac{1}{\log_2 M}$.

Тогда для любого x, такого что $0<x<\delta$, будем иметь $\dfrac{1}{x}>\log_2 M$ и ввиду возрастания функции $y=2^t$ $2^{\frac{1}{x}}>2^{\log_2 M}=M$, что и требовалось доказать.

б) Прикидка: при $x\to-0$ величина $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, а значит, и $2^{\frac{1}{x}}\to0$.

Таким образом, надо доказать, что для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что при всех x, таких что $-\delta<x<0$, будет выполняться неравенство $\left|2^{\frac{1}{x}}-0\right|<\varepsilon$.

Положим $\varepsilon_1=\min\left\{\varepsilon,\dfrac{1}{2}\right\}$. Возьмем $\delta=-\dfrac{1}{\log_2\varepsilon_1}$.

Поскольку $|x|<\delta$, то $\dfrac{1}{|x|}>\dfrac{1}{\delta}$ и $-\dfrac{1}{|x|}<-\dfrac{1}{\delta}$, а значит, $2^{\frac{1}{x}}=2^{-\frac{1}{|x|}}<2^{-\frac{1}{\delta}}=2^{\log_2\varepsilon_1}=\varepsilon_1<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Дайте определения бесконечных односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

2. Может ли функция быть непрерывной слева и иметь бесконечный предел справа?

3. Может ли функция не иметь никакого (ни конечного, ни бесконечного) предела слева, но иметь конечный предел справа?

Упражнения

2.37. Определите, какие их указанных пределов (конечных или бесконечных) существуют, и найдите их: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x+3}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x+3}{x-2}$.

2.38. Вычислите односторонние пределы: а) $\lim\limits_{x\to +0} e^{-\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -0} e^{-\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\ln x}$.

Глава 3
ПРОИЗВОДНАЯ

В результате изучения главы 3 студент должен:

знать

- определения и свойства производной функции в точке, касательной к графику функции;
- геометрический и физический смысл производной;
- формулы для производных основных элементарных функций;

уметь

- вычислять производные для элементарных функций;
- составлять уравнения касательных;

владеть

- навыками вычисления производных.

3.1. Задачи, приведшие к понятию производной

Понятие производной является одним из наиважнейших понятий в математике, имеющим большое прикладное значение. К понятию производной исторически привели задачи двух типов: определение мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения тела и построение касательной к произвольной кривой на плоскости. Понятие производной начало формироваться в XVII в. благодаря работам И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

Исаак Ньютон исследовал вопросы определения скорости движения тел. Он рассматривал зависимость координаты положения тела от времени и называл соответствующие функции *флюэнтами* (текущими значениями — от латинского слова *fluere* — течь), а их производные по времени — *флюксиями* (от того же слова). Производные он обозначал с помощью точек над функциями, например производную функции $x = x(t)$ он обозначал как $\dot{x}$. Это обозначение для производных от функций времени употребляется и сейчас (в основном в физике). Кроме того, Ньютон указал способы вычисления производных для ряда функций.

Рассмотрим задачу определения скорости тела в заданной точке, которая привела Ньютона к понятию производной. Пусть тело движется прямолинейно, причем его движение описывается уравнением $x = x(t)$, где t — время, отсчитываемое от некоторого момента $t = 0$, а x — координата (смещение) тела, т.е. расстояние от некоторой фиксированной точки O (начала отсчета) с учетом знака. На рис. 3.1 показана развертка этого движения: по оси абсцисс откладывается время t, по оси ординат — смещение x от точки O. На приведенном рисунке тело все время удаляется от точки O, поскольку график функции $x(t)$ поднимается вверх (функция возрастает).

Если бы в какие-то периоды времени тело изменило направление движения на противоположное, график опустился бы вниз (функция убывает).

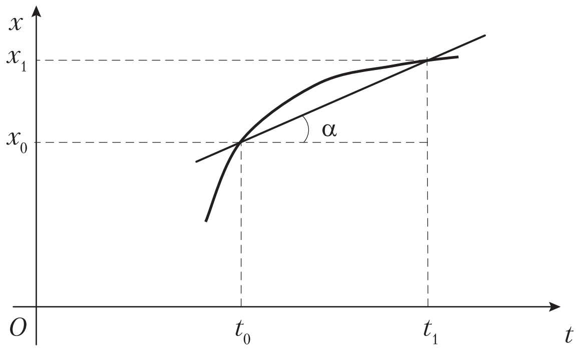


Рис. 3.1. **Прямолинейное движение тела**

Пусть мы хотим определить скорость тела в момент времени t_0. Кстати, пока это понятие нами еще не определено, оно воспринимается интуитивно. Возьмем некоторый момент времени $t_1 \neq t_0$. В этот момент времени тело находится в точке $x_1 = x(t_1)$. Средняя скорость за время, изменившееся в интервале $[t_0; t_1]$, как известно, равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 3.1).

Поскольку скорость в ближайших к t_0 точках t_1 в обычных условиях мало отличается от скорости в точке t_0, средняя скорость на промежутке от t_0 до t_1 будет приближенно равна *мгновенной скорости*, т.е. скорости в момент времени t_0. Причем чем ближе точка t_1 к t_0, тем ближе эта средняя скорость к мгновенной.

Таким образом, в качестве *скорости* в момент времени t_0 (или так называемой мгновенной скорости) логично взять предел

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \operatorname{tg}\alpha(t)$$

(если он, конечно, существует). Этот предел и был назван Ньютоном флюксией, а впоследствии — производной функции $x(t)$ в точке t_0.

Заметим, что скорость является алгебраической величиной — она может принимать как положительные (при движении в положительном направлении оси Ox), так и отрицательные (при движении в отрицательном направлении оси Ox) значения.

Посмотрим, к чему будет стремиться угол α при $t \to t_0$. Очевидно, что секущая линия, соединяющая точки $(t_0; x_0)$ и $(t, x(t))$, будет стремиться занять положение касательной, а предельное значение $\alpha_{\text{кас}}$ угла α является углом наклона этой касательной к оси абсцисс (рис. 3.2).

Этим рассмотрением мы «убили сразу двух зайцев», показав, что производная — это 1) скорость изменения значения функции и 2) тангенс угла наклона касательной к горизонтальной оси. Первое знаменует физический смысл производной (подход Ньютона), второе — геометрический (подход Лейбница).

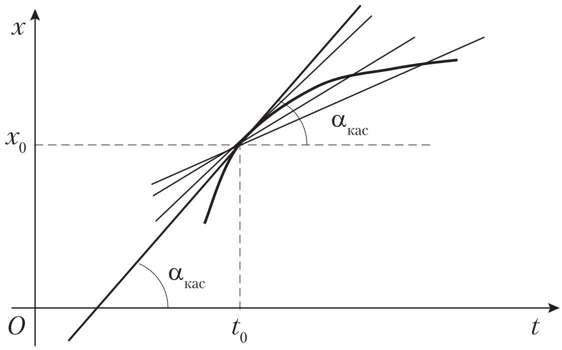


Рис. 3.2. **Угол наклона касательной**

Современные обозначения производной функции $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx}$ восходят к Лейбницу. Обозначения y' и $f'(x)$ ввел Ж. Л. Лагранж. Понятие производной широко используется в механике.

Аналогично мгновенной скорости в точке (или просто скорости) вводится понятие угловой скорости. Пусть точка M движется по окружности радиуса R (рис. 3.3).

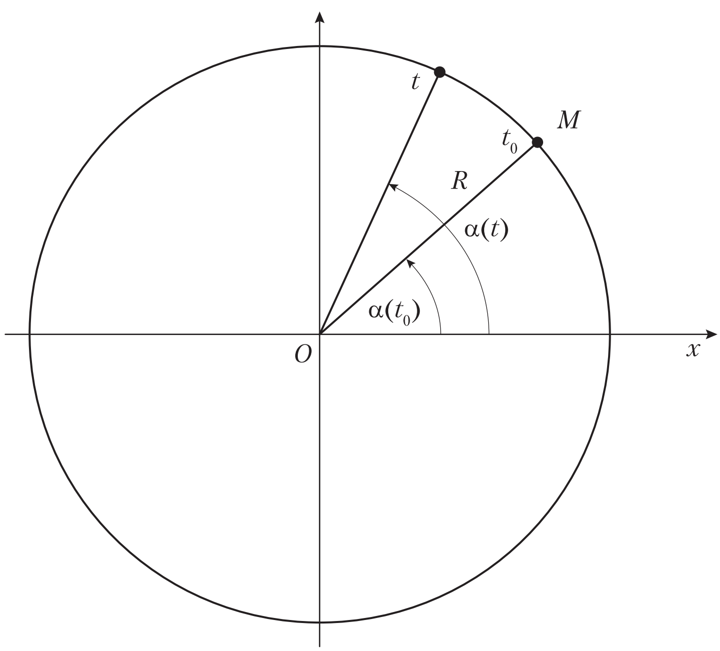


Рис. 3.3. **К угловой скорости**

Пусть радиус OM в момент времени t_0 образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha(t_0)$, а в момент времени t — угол $\alpha(t)$. Средней угловой скоростью на промежутке $[t_0; t]$ называют отношение $\omega_{ср} = \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$, а конечный предел этого отношения при t, стремящемся к t_0 (если он существует), называют мгновенной угловой скоростью, или просто *угловой скоростью*:

$$\omega(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}=\alpha'(t).$$

Производная от скорости по времени называется *ускорением* точки:

$$a(t)=v'(t).$$

Заметим также, что линейная скорость в случае движения по окружности постоянного радиуса связана с угловой скоростью соотношением

$$v(t)=R\cdot\omega(t).$$

3.2. Определение производной

Далее, как правило, будем предполагать, что функция определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки x_0, т.е. и слева, и справа от нее. В отдельных случаях, когда функция задана только с одной стороны от точки x_0, будем говорить об односторонней производной (левосторонней или правосторонней).

Определение 3.1. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то говорят, что она *дифференцируема* в этой точке.

Напомним, что в соответствии с определением предела переменная x при стремлении к x_0 не принимает самого значения x_0 (иначе получилась бы бессмыслица — как говорят математики, «неопределенность типа $\frac{0}{0}$»). Причем стремление переменной x к x_0 рассматривается по всем законам с обеих сторон (и слева, и справа), если только функция задана с обеих сторон. Если функция задана только с одной стороны от точки x_0, говорят, что имеет место *односторонняя производная* (правосторонняя производная при $x > x_0$ и левосторонняя производная при $x < x_0$).

Как уже отмечалось, производная обычно обозначается как $f'(x_0)$, или $\frac{df}{dx}$, или, если функция задана уравнением $y=f(x)$, — как y' или как $\frac{dy}{dx}$. Первое обозначение отличается от остальных тем достоинством, что в нем явно указывается точка, в которой берется производная. В остальных же обозначениях она не указывается, хотя и подразумевается. Это обстоятельство необходимо иметь в виду, каждый раз понимая, о какой точке идет речь. Правда, обозначение $f'(x_0)$ также не лишено опасности: надо четко уяснить, что это производная от функции $f(x)$, взятая в точке x_0, а не производная от числа $f(x_0)$, т.е. при вычислении производной по правилам, которые будут приведены ниже, сначала следует вычислить производную, а только затем подставить значение x_0, а не наоборот (в противном случае всегда получится нуль — производная от константы равна нулю — см. пример 3.1).

Пример 3.1

Найдем производную константы $f(x) = c$ в произвольной точке x_0.

Решение. По определению производной

$$f'(x_0)=(c)'=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Пример 3.2

Найдем производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. По определению производной

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Определение производной можно дать в другой терминологии (не изменяя существа дела). Назовем величину $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента (оно может быть и положительным, и отрицательным, в зависимости от того, где находится точка x по отношению к x_0 — справа или слева от нее), а величину $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — приращением функции. Тогда производную можно определить как $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (рис. 3.4). Данная символика, как уже отмечалось выше, таит в себе опасность забыть о точке, в которой берется производная, поскольку во введенных обозначениях она явно не указывается.

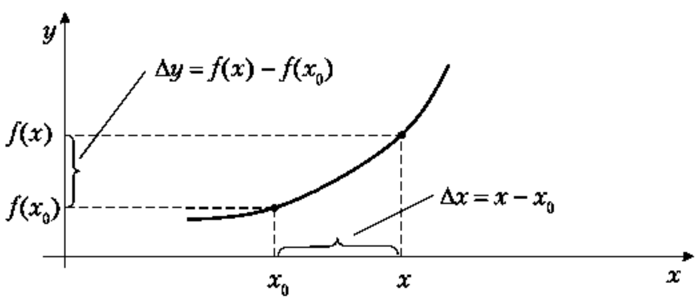


Рис. 3.4. **К определению производной через приращения аргумента и функции**

В этих обозначениях текущее значение переменной x, стремящейся к x_0, равно $x = x_0 + \Delta x$. Однако часто индекс «0» в обозначении точки x_0, в которой берется производная, опускают и пишут просто x. В этом случае букву x в левой части равенства $x = x_0 + \Delta x$ уже употреблять нельзя, поскольку в таких обозначениях x обозначает не текущую, а фиксированную точку, в которой берется производная. Поэтому текущая точка при таком стиле обозначений записывается просто как $x+\Delta x$. Тогда имеем $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, откуда, в частности, следует равенство, которое нам в дальнейщем понадобится:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если в точке x существует производная $f'(x)$,* то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0. \blacksquare$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке x производную, то эта функция непрерывна в этой точке. Действительно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$ означает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)-f(x))=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)-f(x)=0,$$

или $\lim\limits_{(x+\Delta x)\to x}f(x+\Delta x)=f(x)$.

Таким образом, можно сказать, что, для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке x производную, необходимо, чтобы она была в этой точке непрерывна.

Не всякая функция имеет производную во всех точках. Как только что отмечалось, для существования производной функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо, чтобы сама функция была задана и непрерывна в этой точке. Однако перечисленных условий недостаточно, чтобы производная существовала. Можно привести примеры, когда функция задана и непрерывна в точке, а производная не существует. В частности, производная не существует в точках излома графика функции (углы) и в точках, в которых график функции имеет вертикальную касательную. Существуют и более сложные случаи отсутствия производной, о которых мы упоминать не будем.

Пример 3.3

Рассмотрим функцию $f(x)=|x|$ (рис. 3.5).

Эта функция задана на всей числовой прямой и непрерывна в каждой ее точке. Однако в точке $x=0$ она имеет излом и не имеет производной.

Действительно,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ -1 \text{ при } x<0,\end{cases}$$

так что при $x\to 0$ предела это выражение не имеет.

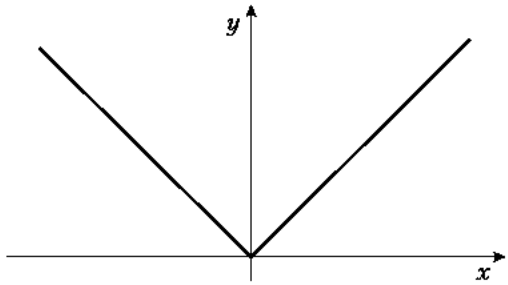


Рис. 3.5. **Функция $f(x) = |x|$**

Пример 3.4

Пусть $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси, и ее график точек излома не имеет, но имеет вертикальную касательную в точке $x=0$ (рис. 3.6). Попробуем найти производную этой функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

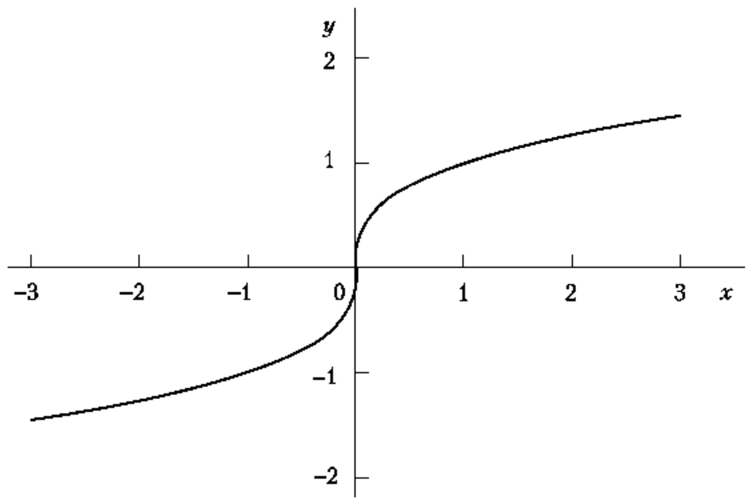


Рис. 3.6. **Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$**

Как видим, для данной функции не существует *конечного* предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x=0$.

Если изменять точку x_0, т.е. рассматривать производную функции $f(x)$ от всевозможных точек x_0, то производная станет уже не числом, а функцией от переменной x_0: $f'(x_0)$. Если производную рассматривают как функцию, то индекс у аргумента обычно не пищут, а пишут просто $f'(x)$. Чтобы получить эту функцию, нужно вычислять производную не в конкретной точке, а в общем виде. Покажем, как это делается, на примере.

Пример 3.5

Вычислим производную функции $y=x^3$ в произвольной точке x_0.

Решение. Имеем

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=\lim_{x\to x_0}x^2+\lim_{x\to x_0}xx_0+x_0^2=3x_0^2.$$

«Размораживая» теперь точку x_0, т.е. делая ее переменной и обозначая просто как x, получим формулу для вычисления производной функции $y=x^3$: $y'=3x^2$, или, короче,

$$(x^3)'=3x^2.$$

Пример 3.6

Вычислим производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение. Имеем

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x_0-x)}{(x-x_0)xx_0}=-\lim_{x\to x_0}\frac{1}{xx_0}=-\frac{1}{x_0^2}.$$

«Размораживая», теперь точку x_0 и обозначая просто как x, получим формулу для вычисления производной функции $y=\frac{1}{x}$: $y'=-\frac{1}{x^2}$, или, короче,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Пример 3.7

Вычислим производную функции $y=\sqrt{x}$.

Решение. Имеем

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

«Размораживая» теперь точку x_0 и обозначая просто как x, получим формулу для вычисления производной функции $y=\sqrt{x}$: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, или

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что область определения производной $D(y')=(0;+\infty)$ не совпадает с областью определения самой функции $D(y)=[0;\infty)$. Производная в точке $x=0$ не существует.

Определение 3.2. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке множества X, говорят, что $f(x)$ *дифференцируема на множестве X*.

Как уже отмечалось, понятие производной широко используется в физике (в том числе в ее разделе — механике), в частности при рассмотрении прямолинейного движения тела. В теоретических построениях тело моделируется как материальная точка, которая движется по прямой линии — оси Ox. При этом движение описывается функцией $x(t)$ — величиной смещения точки от исходной точки O (начала координат) в зависимости от времени t. Если точка находится правее начала координат, смещение считается положительным, если левее — отрицательным.

Пусть $s(t)$ — путь, пройденный телом (точкой) за время t. Как известно из физики, путь — это расстояние, пройденное телом вне зависимости от направления его движения, т.е. длины отрезков оси Ox, пройденных телом в положительном и отрицательном направлениях, складываются. Предположим, что в некотором (хоть и достаточно малом) интервале времени $(t-\varepsilon; t+\varepsilon)$ тело движется в одном направлении. Тогда при движении в положительном направлении $s'(t)=x'(t)=v(t)$, а при движении в отрицательном направлении $s'(t)=-x'(t)=-v(t)$, если производная $x'(t)$ существует. Производная $x'(t)$ заведомо не существует в точках поворота — когда резко изменяется направление движения. В механике такие явления обычно связаны с ударом тела о некоторую преграду. Таким образом, для точек, в которых существует производная $x'(t)$, справедливо равенство

$$|v(t)|=s'(t).$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что такое производная? Каков ее геометрический и физический смысл?
2. Проанализируйте определение производной. В каких точках имеет смысл говорить о наличии или отсутствии производной? В какого рода точках о производной говорить бессмысленно?
3. Укажите, какое ограничение на приращение аргумента вводится в определении производной.
4. Можно ли производную вычислять как отношение приращений функции и аргумента?
5. Что такое дифференцируемость функции?
6. Как определяются скорость и ускорение тела при прямолинейном движении?

Упражнения

3.1. Найдите приращение функции $y=2x^2+1$ в точке $x=1$, если приращение аргумента $\Delta x=0{,}5$.

3.2. Исходя из определения, вычислите производную функции $y=3x^2-2x+1$ в точке $x=2$.

3.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных следующих функций:

а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; г) $y=\sqrt{1-2x}$; д) $y=\sqrt[3]{3+2x}$; е) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

3.4. Зависимость смещения x (м) автомобиля (от начального положения) в процессе разгона от времени t (с) выражается соотношением $x=0{,}01t^3$. Найдите мгновенную скорость автомобиля через 30 с после начала движения.

3.5. Тело движется по закону $x(t) = t^3$, $t \geq 0$, где t — время, с; x — координата, м. Вычислите мгновенную скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с, а также среднюю скорость тела за первые 2 с движения.

3.6. Точка движется по окружности радиуса 3 м по закону $\alpha(t) = 2t^2 + 3t$, где t — время, с; α — угол, рад, образуемый радиусом с положительным направлением оси Ox. Найдите угловую и линейную скорость в момент времени $t = 2$ с.

3.7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 2)$. На рис. 3.7 изображен график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом а) 60°; б) 120°; в) 135° к положительному направлению оси абсцисс. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y = f(x)$, параллельных оси абсцисс или совпадающих с ней.

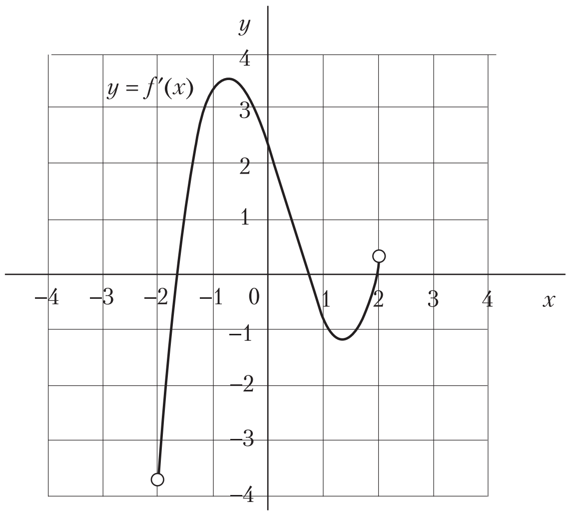


Рис. 3.7. **К упражнению 3.7**

3.8. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

3.9. Может ли существовать односторонняя производная в точках разрыва функции?

3.10*. Приведите пример функции, имеющей разрывную производную в точке x_0.

3.3. Свойства производной

Как уже отмечалось выше, производная характеризует скорость изменения значения функции в точке: чем больше значение производной, тем выше темп роста функции в данной точке. В частности, если производная положительна в рассматриваемой точке, функция в этой точке имеет тенденцию к возрастанию, т.е. в некоторой окрестности справа от данной точки ее значение больше, чем в этой точке, а слева — меньше[1]. Если произ-

[1] Это, вообще говоря, не означает, что в некоторой окрестности точки x_0 функция возрастает. Можно привести примеры, когда $f'(x_0) > 0$, но ни в какой окрестности этой точки функция f не является возрастающей (совершает бесконечное множество затухающих колебаний при общей тенденции к возрастанию).

водная отрицательна, картина прямо противоположная. Это свойство производной играет важную роль в приложениях. Сформулируем и докажем его.

Теорема 3.2. *Если* $f'(x_0)>0$, *то существует такая окрестность* $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, *что для любого* x, *удовлетворяющего условию* $x_0<x<x_0+\delta$, *выполняется неравенство* $f(x)>f(x_0)$, *а для любого* x, *удовлетворяющего условию* $x_0-\delta<x<x_0$, *выполняется неравенство* $f(x)<f(x_0)$.

Если $f'(x_0)<0$, *то существует такая окрестность* $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, *что для любого* x, *удовлетворяющего условию* $x_0<x<x_0+\delta$, *выполняется неравенство* $f(x)<f(x_0)$, *а для любого* x, *удовлетворяющего условию* $x_0-\delta<x<x_0$, *выполняется неравенство* $f(x)>f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f'(x_0)>0$. Положим $f'(x_0)=\varepsilon$. Тогда по определению производной

$$\varepsilon=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

По определению предела для любого $\varepsilon>0$, в том числе и для выбранного нами $\varepsilon=f'(x_0)$, должно существовать такое число $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon=f'(x_0),$$

откуда, в частности, следует $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)>-f'(x_0)$, или $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>$ >0.

Из последнего неравенства следует, что в пределах указанной окрестности при $x>x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, а при $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Пусть теперь $f'(x_0)<0$. Положим $\varepsilon=-f'(x_0)$. Тогда по определению производной

$$-\varepsilon=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

По определению предела для выбранного нами числа $\varepsilon=-f'(x_0)$ должно существовать такое число $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon=-f'(x_0),$$

откуда, в частности, следует $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)<-f'(x_0)$, или $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<$ <0.

Из последнего неравенства следует, что в пределах указанной окрестности при $x>x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а при $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$. ■

Замечание 3.1. Если $f'(x_0)=0$, то в некоторой окрестности точки x_0 значения функции могут быть и больше, и меньше значения $f(x_0)$, и равны ему. Такие точки нужно исследовать особо.

С помощью доказанной теоремы можно, в частности, определять знаки коэффициента b квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$. Вычислим производную квадратного трехчлена в точке $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax^2+bx+c)-c}{x-0}=\lim_{x\to 0}(ax+b)=b.$$

На основании теоремы 3.2 отсюда следует, что в точке $x = 0$ при $b > 0$ функция имеет тенденцию к возрастанию, а при $b < 0$ — к убыванию. При $b =$ $= 0$, очевидно, точка $x = 0$ является абсциссой вершины параболы. Таким образом, справедливо и обратное: если функция в точке $x = 0$ имеет тенденцию к возрастанию, то $b > 0$, если к убыванию, то $b < 0$, если на оси Oy находится вершина параболы, то $b = 0$.

Дифференцируемые функции обладают рядом интересных свойств. Сформулируем два из них в виде теорем.

Теорема 3.3 (Ролля). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *причем* $f(a) = f(b)$. *Тогда на интервале* $(a; b)$ *найдется такая точка* c, *что* $f'(c)=0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, по теореме Вейерштрасса она принимает на нем свои наибольшее M и наименьшее m значения.

Рассмотрим следующие два случая.

1. $M=m$. Тогда на отрезке $[a; b]$ функция принимает постоянное значение: $m \le f(x) \le M$, $M = m \Rightarrow f(x) = M = m$ для всех $x \in [a; b]$. Поэтому на всем отрезке $f'(x)=0$ и в качестве точки c можно взять любую точку из $(a; b)$.

2. $M > m$. Поскольку $f(a) = f(b)$, то либо наибольшее, либо наименьшее значение функции достигается хотя бы в одной внутренней точке отрезка c, иначе бы было $M = m$. Пусть для определенности это будет наибольшее значение: $f(c) = M$ (для наименьшего доказательство аналогично). Покажем, что $f'(c)=0$. Действительно, если $f'(c)>0$, то в соответствии с теоремой 3.2 справа от точки c существуют значения больше, чем $f(c) = M$, а если $f'(c)<0$, то слева от точки c существуют значения больше, чем $f(c) = M$. Ни того ни другого быть не может, поскольку M — наибольшее значение функции на отрезке. Тем самым теорема доказана. ■

На геометрическом языке теорема Ролля означает, что если на концах отрезка значения функции одинаковы, то на графике функции найдется точка, в которой касательная будет параллельна оси Ox (рис. 3.8).

Теорема 3.4 (Лагранжа). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$. *Тогда на интервале* $(a; b)$ найдется такая точка c, что

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

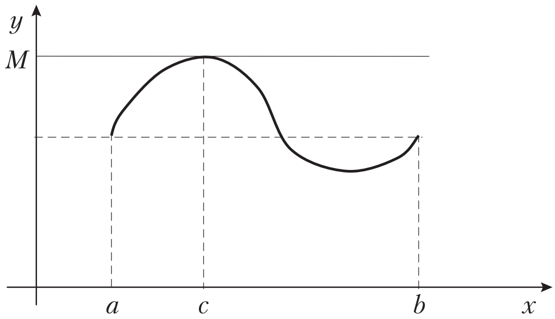


Рис. 3.8. **Геометрический смысл теоремы Ролля**

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ как разность между непрерывной и линейной функциями. На интервале $(a;\ b)$ она всюду имеет производную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Подстановкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$.

Таким образом, по теореме Ролля отсюда следует существование такой точки $c\in\ (a;\ b)$, что $F'(c)=0$, или $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, или, наконец, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Обращаясь к геометрическому истолкованию теоремы Лагранжа (рис. 3.9), заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB (линии, соединяющей концы графика функции), а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что на дуге AB всегда найдется по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

Теорему Лагранжа называют также *теоремой о среднем*, поскольку отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ задает среднюю скорость изменения функции f на отрезке $[a;\ b]$.

Доказанная формула $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, или ее вариант $f(b)-f(a)= f'(c)\cdot(b-a)$, носит название *формулы Лагранжа*, или *формулы конечных приращений*.

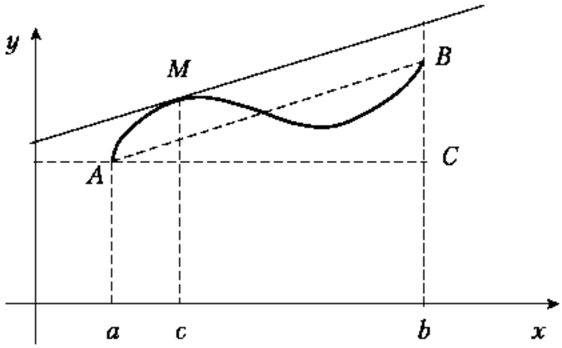


Рис. 3.9. **Геометрический смысл теоремы Лагранжа**

Положив $a = x, b = x + \Delta x, \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), c = x + \theta \Delta x, 0 < \theta < 1$, эту формулу можно представить в виде

$$\Delta f(x) = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x.$$

Если приращение аргумента Δx достаточно мало, а производная $f'(x)$ не слишком сильно изменяется, в приложениях может быть использована приближенная формула

$$\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Пример 3.8

Вычислим с точностью до 0,01 значение корня $\sqrt{101}$ без помощи калькулятора.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $x \in [100; 101]$.

Все условия теоремы Лагранжа выполнены. В соответствии с формулой конечных приращений имеем ($x = 100$, $\Delta x = 1$, $0 < \theta < 1$):

$$\sqrt{101} = f(100) + f'(100 + \theta \Delta x)\Delta x = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta \cdot 1}} \cdot 1 = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}.$$

Очевидно, что $\frac{1}{2\sqrt{100+\theta}} < \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ и $\frac{1}{2\sqrt{100+\theta}} > \frac{1}{2\sqrt{121}} = \frac{1}{22} > 0{,}045$.

Таким образом, с точностью до 0,01 имеем $\sqrt{101} \approx 10{,}05$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что можно утверждать о свойстве функции в точке x, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$?

2. Почему в доказательстве теоремы Ролля утверждается, что если $M > m$, то либо наибольшее, либо наименьшее значение функции достигается во внутренней точке отрезка, а не на его концах?

3. Приведите пример непрерывной на отрезке функции, которая на его концах принимает одинаковые значения, однако производная которой нигде в нуль не обращается.

4. Покажите существенность условия дифференцируемости функции в теореме Лагранжа.

Упражнения

3.11. Вычислите производную функции $y=3x^3-2x^2+1$ в точке $x=2$ и определите, каковы будут ее значения слева и справа от точки $x=2$ в достаточно малой ее окрестности по сравнению с $f(2)$.

3.12. Найдите множества точек, в которых $y'<0$ и $y'>0$ для следующих функций исходя из определения производной: а) $y=x+\sqrt{x}$; б) $y=\frac{1}{x}+x^2$; в) $y=x+\sin x$.

3.13*. Приведите пример функции f, которая имеет в точке $x=0$ положительную производную, но не является возрастающей ни в какой ее окрестности.

3.14. Приведите пример функции, возрастающей в некоторой окрестности точки x_0, при условии что $f'(x_0)=0$.

3.15. Найдите точку c в формуле Лагранжа для функции $y=x^3$, $x\in[1;3]$.

3.4. Операции с производными

Для практических приложений не столь важно знать, как выводятся формулы производных исходя из определения, сколь важно владеть техникой их вычисления. А техника вычисления производных базируется в основном на использовании формул для производных от суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции более простых функций, значения производных для которых известны и приводятся в специальных таблицах. Формулы же для производных от функций, полученных в результате указанных операций, получаются непосредственно из определения производной. Здесь мы выведем указанные формулы, а также формулу для производной обратной функции.

3.4.1. Производная суммы и разности функций

Теорема 3.5. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) их производных, если последние существуют, т.е.*

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x),$$
$$(u(x)-v(x))'=u'(x)-v'(x).$$

Доказательство. Докажем формулу для суммы. Обозначим сумму функций через $w(x)$ $(w(x)=u(x)+v(x))$ и вычислим производную этой функции, пользуясь определением производной через приращения аргумента и функции:

$$w'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}=u'(x)+v'(x).$$

Для разности доказательство аналогично. ■

Данная теорема путем ее многократного применения может быть распространена на любое число слагаемых в алгебраической сумме, так что, например,

$$(u_1+u_2-u_3+u_4-u_5)'=u_1'+u_2'-u_3'+u_4'-u_5'.$$

Пример 3.9

Вычислим производную функции $f(x)=x^3-x+3$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=(x^3-x+3)'=(x^3)'-(x)'+(3)'=3x^2-1+0=3x^2-1.$$

3.4.2. Производная произведения функций

Теорема 3.6. *Если производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют, то производную произведения $u(x)\cdot v(x)$ функций $u(x)$ и $v(x)$ можно вычислить по формуле*

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Доказательство. Обозначим произведение функций через $w(x)$ ($w(x)=$ $=u(x)\cdot u(x)$) и вычислим производную этой функции, пользуясь определением производной через приращения аргумента и функции, а также равенством $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x)$:

$$w'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u(x))\cdot(v(x)+\Delta v(x))-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right)\cdot v(x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x\cdot\Delta x}\cdot\Delta x=$$

$$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=$$

$$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v'(x)\cdot 0=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).\ \blacksquare$$

Следствие 3.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной[1]:

$$(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x).$$

[1] При $k\neq 0$ это всегда верно, а при $k=0$ это верно лишь в случае, когда $f'(x)$ существует.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы для производной произведения функций с учетом того, что производная константы равна нулю:

$$(k\cdot f(x))' = k'\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = k\cdot f'(x).$$

Пример 3.10

Выведем формулу для производной функции $y = x^2$, пользуясь тем, что $(x)' = 1$, и теоремой 3.4.

Решение. Имеем

$$(x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x + x\cdot x' = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x.$$

Пример 3.11

Вычислим производную функции $y = (x^2+3x-2)(4x-5)$, пользуясь теоремой 3.6 и результатом решения примера 3.9.

Решение. Имеем

$$y' = \left((x^2+3x-2)(4x-5)\right)' = (x^2+3x-2)'\cdot(4x-5) + (x^2+3x-2)\cdot(4x-5)' =$$
$$= (2x+3)\cdot(4x-5) + (x^2+3x-2)\cdot 4 = 8x^2+2x-15+4x^2+12x-8 =$$
$$= 12x^2+14x-23.$$

3.4.3. Производная частного

Теорема 3.7. *Если производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют и $v(x)\neq 0$, то производную частного $\frac{u(x)}{v(x)}$ функций $u(x)$ и $v(x)$ можно вычислить по формуле*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. Обозначим частное функций через $w(x)$, $w(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, и вычислим производную этой функции, пользуясь определением производной через приращения аргумента и функции, а также равенством $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = w'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x)+\Delta u(x)}{v(x)+\Delta v(x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(u(x)+\Delta u(x))\cdot v(x) - u(x)\cdot(v(x)+\Delta v(x))}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x) + \Delta u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x\cdot(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x\cdot(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v(x)}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}((v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x))}=\frac{\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right)\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v(x)+\Delta v(x))}=$$

$$=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)\cdot(\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v(x))}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)\cdot(v(x)+0)}=$$

$$=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \blacksquare$$

Пример 3.12

Вычислим производную функции $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x-2}$.

Решение. Имеем

$$y'=\left(\frac{2x^2+3x-1}{x-2}\right)'=\frac{(2x^2+3x-1)'\cdot(x-2)-(2x^2+3x-1)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(4x+3)\cdot(x-2)-(2x^2+3x-1)}{(x-2)^2}=\frac{4x^2+3x-8x-6-2x^2-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x-5}{(x-2)^2}.$$

3.4.4. Производная суперпозиции функций

Напомним, что суперпозицией (композицией) функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $F(x)=f(g(x))$, т.е. вместо значения аргумента x в выражение для функции $f(x)$ подставляется значение $g(x)$. Иначе говоря, если сменить обозначение аргумента x в функции $f(x)$, например, на t, что, очевидно, не меняет дела, то вместо выражения $F(x)=f(g(x))$ можно написать равносильную ему систему $\begin{cases}F(x)=f(t),\\ t=g(x).\end{cases}$

Суперпозицию функций называют также сложной функцией, поскольку она как бы составлена из более простых. Вычисление значений приведенной выше сложной функции осуществляется в следующей последовательности: сначала по заданному значению x вычисляется значение «внутренней» функции $t=g(x)$, а затем по найденному значению t вычисляется значение «внешней» функции $F(x)=f(t)$.

Заметим, что суперпозиция функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $f(g(x))$, и суперпозиция функций $g(x)$ и $f(x)$, т.е. $g(f(x))$ — это разные функции.

Пример 3.13

Пусть $f(x)=\sqrt{1-x}$, а $g(x)=\sin x$. Тогда суперпозицией функций $f(x)$ и $g(x)$ будет функция $y=f(g(x))=\sqrt{1-\sin x}$, а суперпозицией функций $g(x)$ и $f(x)$ будет функция $y = g(f(x)) = \sin\sqrt{1-x}$, что, очевидно, не одно и то же. Даже область определения у них различная: $D(\sqrt{1-\sin x}) = (-\infty; +\infty)$, а $D(\sin\sqrt{1-x}) = (-\infty; 1]$.

С суперпозицией функций мы встречались многократно. Поэтому важно уметь вычислять производные от функций, представляющих собой суперпозицию более простых функций, производные от которых мы уже умеем вычислять.

Теорема 3.8. *Пусть функция $t = g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(t)$ имеет производную в точке $t_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y = F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, причем $y' = F'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$.*

Доказательство. По опрсделснию производной $y' = F'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$.

Пусть аргументу x в точке x_0 дано некоторое приращение Δx. Тогда значение функции $t = g(x)$ получит соответствующее ириращение $\Delta t = \Delta g(x_0) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, которое будет стремиться к нулю, как только Δx будет стремиться к нулю (теорема 3.1, рис. 3.10).

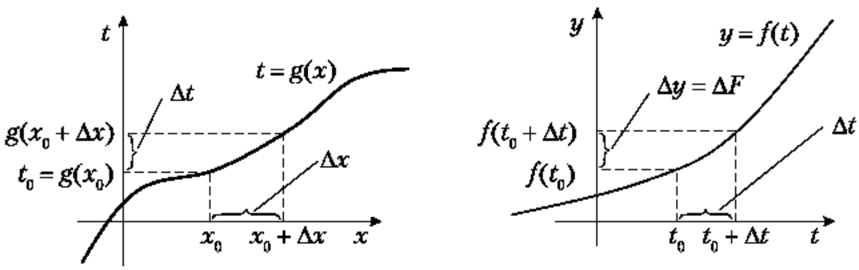


Рис. 3.10. **К доказательству теоремы 3.8**

Умножим отношснис под знаком прсдсла на $\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta t}$, т.с. фактичсски на единицу, и, учитывая, что $\Delta F(x_0) = \Delta f(t_0)$, произвсдсм прсобразования:

$$y' = F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta t}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = f'(t_0) \cdot g'(x_0). \blacksquare$$

Пример 3.14

Вычислим производную функции $y = (x^2 + 3x - 4)^3$.

Решение. Эту функцию можно рассматривать как сложную — суперпозицию функций $y(t) = t^3$ и $t(x) = x^2 + 3x - 4$. Тогда, применяя формулу производной от суперпозиции функций, получим

$$y' = ((x^2 + 3x - 4)^3)' = 3(x^2 + 3x - 4)^2 \cdot (x^2 + 3x - 4)' =$$
$$= 3(x^2 + 3x - 4)^2 \cdot (2x + 3).$$

Данное правило, как нетрудно видеть, действует следующим образом: сначала берется производная от «внешней» функции (в данном примере — от куба), причем сложный аргумент ее («внутренняя» функция, в рассмотренном примере x^2+3x-4) считается единым целым и переписывается без изменения; затем полученное выражение умножается на производную от «внутренней» функции.

Если «внутренняя» функция сама является сложной (суперпозицией более простых), то описанное правило можно применить еще раз — уже к ней. В этом случае получится произведение трех сомножителей — нечто вроде цепочки сомножителей, отчего это правило вычисления производной иногда называют *цепным правилом*. Очевидно, оно действует на любое количество вложенных друг в друга функций (нечто вроде матрешки).

Пример 3.15

Вычислим производную функции $y=\dfrac{1}{(x^2+3x-4)^3}$.

Решение. Эту функцию можно рассматривать как суперпозицию трех функций: $y=\dfrac{1}{u}$, $u=t^3$ и $t=x^2+3x-4$.

Таким образом, производная будет равна

$$y'=\left(\frac{1}{(x^2+3x-4)^3}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot 3t^2\cdot(2x+3)=$$
$$=-\frac{1}{[(x^2+3x-4)^3]^2}\cdot 3(x^2+3x-4)^2(2x+3)=-\frac{6x+9}{(x^2+3x-4)^4}.$$

3.4.5. Производная обратной функции

Как мы знаем, обратной функцией к функции $y=f(x)$ называется такая функция[1] $x=g(y)$, что $f(g(y))=y$. Напомним, что обратная функция существует не для любой функции $y=f(x)$. Здесь будем полагать, что обратная функция существует в некоторой окрестности рассматриваемой точки x_0. Заметим, что исходная функция и обратная к ней являются взаимно обратными: каждая функция из этой пары является обратной к оставшейся, а обратная функция к обратной является исходной функцией.

Теорема 3.9. *Пусть функция $y=f(x)$ задана, непрерывна и монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в точке x_0, отличную от нуля: $f'(x_0)\neq 0$. Тогда в этой окрестности точки x_0 функция $y=f(x)$* имеет обратную функцию $x=g(y)$, *причем обратная функция имеет в точке $y_0=f(x_0)$ производную, которую можно вычислить по формуле* $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Как мы уже знаем (см. теорему 2.8 из гл. 2), непрерывная монотонная функция, заданная на интервале, имеет обратную $x=g(y)$, кото-

[1] Не путать с функцией $y=(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$.

рая тоже является непрерывной и монотонной, причем, очевидно, $x_0 = g(y_0)$. Покажем, что производная $g'(y_0)$ существует и равна $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

По определению производной $g'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta g(y_0)}{\Delta y}$. Пусть аргументу y в точке y_0 придано некоторое приращение Δy. Тогда значение функции $x = g(y)$ получит некоторое приращение $\Delta x = \Delta g(y_0)$ (рис. 3.11). Пусть $\Delta y \to 0$. Тогда (по теореме 2.1) приращение функции $x = g(y)$ также будет стремиться к нулю: $\Delta x = \Delta g(y_0) \to 0$. Таким образом, заменяя $\Delta y \to 0$ на $\Delta x \to 0$, получим

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Рис. 3.11. **К доказательству теоремы 3.9** ■

Пример 3.16

С использованием теоремы 3.11 вычислим производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. Найдем функцию, обратную к данной, решив данное уравнение относительно x: $x = y^2, y \geq 0$. Ограничение $y \geq 0$ наложено ввиду того, что в исходном выражении $y = \sqrt{x}$ величина y не может быть отрицательной.

Посмотрим, везде ли можно воспользоваться теоремой о производной обратной функции. Граничную точку $y = 0$ придется отбросить — в ней производная функции $x = y^2$ равна нулю: $x'(0) = (y^2)' = 2y = 0$. В остальных же точках $x' = (y^2)' = 2y \neq 0$. Поэтому при $y > 0$ можно воспользоваться теоремой 3.7:

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теорему о производной суммы и произведения.
2. Чему равны производные произведения и частного двух функций?
3. Чему равна производная суперпозиции функций?
4. Чему равна производная обратной функции?

Упражнения

3.16. Пользуясь теоремой о производной суммы и разности функций, вычислите производную функции $y = x - x^3$.

3.17. Вычислите производную функции $y = x^3 + x - 6$.

3.18. Найдите производную функции $y = \frac{1}{x} - x^3 + 5$ в точке $x = 1$.

3.19. Приведите пример, когда нарушается заключение теоремы 3.5, т.е. когда производные суммы (разности) двух функций существуют, а производные отдельных слагаемых — нет.

3.20. Пользуясь правилом вычисления производной произведения функций, выведите формулу для производной функции $y = \frac{1}{x^2}$ и найдите область ее определения.

3.21. Вычислите производную функции $y = (2x^2 - 3x + 1) \cdot \sqrt{x}$.

3.22. Найдите производную функции $y = (x^2 - 2x - 5) \cdot (x^4 + x^2 + 2)$ в точке $x = -1$.

3.23. Вычислите производную функции $y = \frac{x+1}{x-2}$.

3.24. Вычислите производную функции $y = \frac{2x+3}{x^2-1}$.

3.25. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 1}$ в точке $x = 0$.

3.26. Вычислите производную функции $y = \frac{1}{x-1}$ как суперпозиции двух функций.

3.27. Вычислите значение производной функции $y = \frac{2}{3-x}$ в точке $x = 2$, представив ее как суперпозицию двух функций.

3.28. Найдите производную функции $y = \frac{3}{(2x^2-1)^4}$ как суперпозиции трех функций.

3.29. Вычислите производную функции $y = (3x - x^2)^5$.

3.30. Найдите значение производной функции $f(x) = (3\sqrt{x} - 2)^4$ в точке $x_0 = 1$.

3.31. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$. Решите уравнение $f'(x) = f(x)$.

3.32. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции является нечетной функцией, а производная нечетной дифференцируемой функции является четной функцией. Дайте геометрическую интерпретацию этого факта.

3.33. Пусть $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — периодическая дифференцируемая функция. Докажите, что производная этой функции также является периодической функцией с тем же периодом, либо опровергните это утверждение примером, показывающим, что оно неверно. Дайте геометрическую интерпретацию этого факта. Обязательно ли основной (т.е. наименьший положительный) период производной совпадает с основным периодом функции?

3.34. Пусть $f'(x)$ — производная от некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, причем $f'(x)$ — периодическая функция. Докажите, что функция $f(x)$ также является периодической функцией с тем же периодом, либо опровергните это утверждение примером, показывающим, что оно неверно. Дайте геометрическую интерпретацию этого факта.

3.35. На рис. 3.12, *а*, *б* представлены два графика производных функций $f(x)$ и $g(x)$. а) Найдите значение производной сложной функции $f(g(x))$ в точке $x_0 = 1$, если $g(1) = f'(2)$. б) Найдите значение производной сложной функции $g(f(x))$ в точке $x_0 = -1$, если $f(-1) = f'(g'(1) + 1)$.

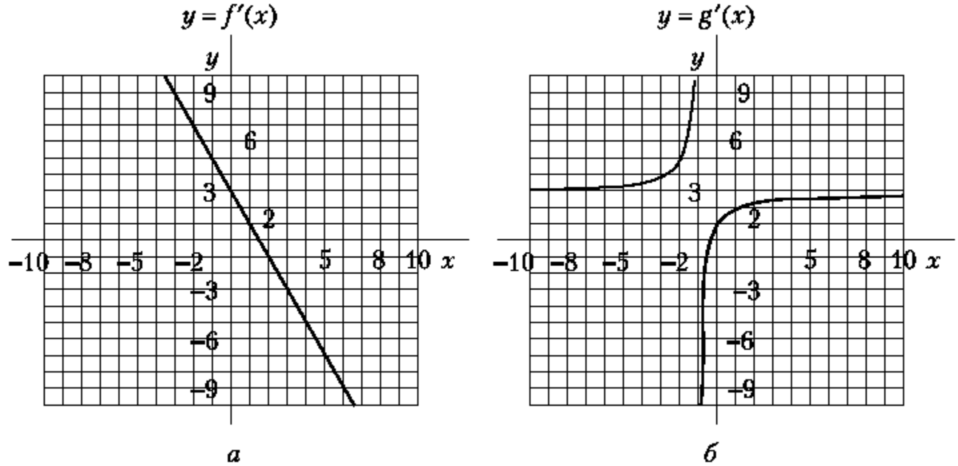


Рис. 3.12. **К упражнению 3.35**

3.36. С помощью теоремы о производной обратной функции вычислите производную функции $y=\sqrt[3]{x}$.

3.37. Найдите обратную функцию для функции $y=\sqrt{x-1}$, укажите область ее определения и вычислите производную исходной функции.

3.38. Вычислите производную функции $y=\sqrt[4]{x^2+2x-8}$ в точке $x = 4$ двумя способами: как производную суперпозиции двух функций и с помощью формулы для производной обратной функции и сравните результат.

3.5. Производные основных элементарных функций

3.5.1. Производные степенных функций

Формулы для производных функций $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, можно получить на основе теоремы о производной произведения функций:

$$(x)'=1,$$

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'\cdot x+x\cdot x'=1\cdot x+x\cdot 1=2x,$$

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'\cdot x+x^2\cdot x'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2,$$

$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+x^3\cdot x'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3.$$

Как мы видим, вырисовывается закономерность: показатель степенной функции становится в производной коэффициентом, а степень уменьшается на единицу. Примем это наблюдение в качестве гипотезы: $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ и проверим, получится ли аналогичная формула для показателя, на единицу большего:

$$(x^{n+1})'=(x^n\cdot x)'=(x^n)'\cdot x+x^n\cdot x'=n\cdot x^{n-1}\cdot x+x^n\cdot 1=(n+1)\cdot x^n.$$

Гипотеза подтвердилась. Таким образом, последовательно вычисляя производные с помощью указанного приема (метода математической индукции, см. гл. 1), мы будем получать формулы, общий вид которых приведен выше: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Эта формула была выведена для степенной функции с натуральными показателями.

Выведем формулу для отрицательных целых показателей $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} =$$

$$= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Очевидно, вид формулы тот же самый.

Можно доказать, что вид формулы сохранится для любых показателей α — рациональных и иррациональных (см. подпараграф 3.5.3):

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Естественно, для $\alpha < 1$ эта формула справедлива при $x > 0$, а для $\alpha > 1$ — при $x \geq 0$.

Производные от радикалов могут быть получены, как показано в подпараграфе 3.4.5, с помощью формул для производной обратной функции. Но можно также воспользоваться общей формулой, приведя выражение с радикалом к виду степенной функции с дробным показателем.

Пример 3.17

Вычислим производную функции $y = \sqrt[5]{x}$.

Решение. 1-й способ. Найдем обратную функцию: $x = y^5$, $y \in \mathbb{R}$. Вычислим производную с помощью формулы для производной обратной функции:

$$y' = (\sqrt[5]{x})' = \frac{1}{(y^5)'} = \frac{1}{5y^4} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \quad x \neq 0.$$

2-й способ. Представим выражение с радикалом в виде степенного, учитывая, что степенное выражение с дробными показателями имеет смысл только для неотрицательных значений x:

$$y = \sqrt[5]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{5}} \text{ при } x \geq 0, \\ -(-x)^{\frac{1}{5}} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда при $x > 0$ будем иметь

$$y' = (\sqrt[5]{x})' = (x^{\frac{1}{5}})' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}},$$

а при $x < 0$

$$y' = (\sqrt[5]{x})' = (-(-x)^{\frac{1}{5}})' = -\frac{1}{5}(-x)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (-1) = \frac{1}{5}(-x)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{(-x)^4}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

Таким образом, при $x > 0$ и при $x < 0$ получили одно и то же выражение, совпадающее с выражением, полученным первым способом. При $x = 0$, очевидно, производная не существует, в чем можно убедиться непосредственно на основании определения производной, выписав соответствующее выражение для вычисления предела.

Пример 3.18

Найдите формулу для суммы $S_n = 1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}$, $x \neq 1$.

Решение. Заметим, что $S_n = 1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1} = (x+x^2+x^3+...+x^n)'$.

При $x = 0$ $S_n = 1$.

При $x \neq 0$ применим формулу геометрической прогрессии:

$$S_n = (x+x^2+x^3+...+x^n)' = \left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)' =$$
$$= \frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

3.5.2. Производные показательных функций

Формулы для производных показательных функций $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, приходится выводить непосредственно из определения нроизводной:

$$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Последний предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ является одним из серии так называемых замечательных пределов. Его вычисление достаточно сложно и требует привлечения дополнительных знаний. Здесь ограничимся лищь констатацией того, что этот нредел равен натуральному логарифму от числа a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a.$$

Таким образом, окончательный вид формулы следующий:

$$y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Интересный результат получается, если в качестве основания показательной функции взять число e — основание натуральных логарифмов:

$$y' = (e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Отсюда очевидно, что при дифференцировании (взятии производной) функции e^x ее вид не изменяется, или, как говорят, функция e^x инвариантна относительно операции дифференцирования.

Пример 3.19

Вычислим производцую от фупкции $y = 2^x$.

Решение. В соответствии с приведешюй формулой имеем $y' = (2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$.

3.5.3. Производные логарифмических функций

Как известно, логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, является обратной к показательной функции $x = a^y$. Поэтому формулу для ее производной можно вывести на основании теоремы о производной обратной функции:

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Наиболее простой и часто употребляемой является формула для натурального логарифма, т.е. когда основанием логарифма является число e. В этом случае получаем:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}.$$

Пример 3.20

Вычислим производную функции $y = \log_2 x$.

Решение. На основании полученной формулы имеем $y' = (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.

С использованием производных показательной и логарифмической функций можно вывести общую формулу для вычисления производной степенной функции, о чем говорилось в подпараграфе 3.5.1. А именно:

$$(x^\alpha)' = (e^{\ln(x^\alpha)})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

(для $\alpha \le 1$ эта формула справедлива при $x > 0$, а для $\alpha > 1$ — при $x \ge 0$).

Пример 3.21

Вычислим производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Данная функция не является ни степенной (поскольку показатель степени — переменная величина), ни показательной (поскольку в основании также переменная величина). Перепишем функцию в следующем виде:

$$y = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}.$$

Теперь ясно, что функцию можно представить в виде суперпозиции элементарных функций и применить к ней правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).$$

Заметим, что этот прием применим для произвольных функций вида $y = (f(x))^{g(x)}$.

3.5.4. Производные тригонометрических функций

Формулу для производной одной из тригонометрических функций придется выводить непосредственно из определения производной. Формулы для производных остальных тригонометрических функций можно вывести, основываясь на известных соотношениях между тригонометрическими функциями.

Производная синуса

Возьмем за основу функцию $y=\sin x$ и выведем формулу для ее производной, используя формулу преобразования разности синусов $\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$y'=(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ преобразуем следующим образом. Заменим $\frac{\Delta x}{2}$ на переменную t: $t=\frac{\Delta x}{2}$. Очевидно, если $\Delta x\to 0$, то и $t\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$.

Этот последний предел, как отмечалось в гл. 2, носит название первого замечательного предела, и его значение равно единице: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

Поскольку функция $\cos x$ непрерывна, предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$ равен значению этой функции в точке, в которой берется предел, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos\frac{2x+0}{2}=\cos x$.

Таким образом, $y'=(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=1\cdot\cos x=\cos x$.

Производная косинуса

Производную косинуса можно получить из производной синуса с использованием формул приведения $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, а также цепного правила:

$$y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$

Производная тангенса

Производную тангенса можно получить путем представления тангенса в виде отнощения синуса к косинусу и примепения правила взятия нроизводной от частного

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная котангенса

Производная котангенса может быть получена из производной тангенса с использованием формул нриведения $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, а также ценного правила:

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 3.22

Вычислим производную функции $y = \dfrac{2\sin^2 x - \operatorname{tg} x}{\cos x}$.

Решение. Применяя получснные формулы для производных тригономстричсских функций, а также формулы для производной от частного и суперпозиции функций, получим

$$y' = \left(\frac{2\sin^2 x - \operatorname{tg} x}{\cos x}\right)' = \frac{(2\sin^2 x - \operatorname{tg} x)' \cdot \cos x - (2\sin^2 x - \operatorname{tg} x) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\left(4\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot \cos x - (2\sin^2 x - \operatorname{tg} x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos^2 x - \frac{1}{\cos x} + 2\sin^3 x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos^3 x - 1 + 2\sin^3 x \cdot \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos^3 x - 1 + 2\sin^3 x \cdot \cos x - \sin^2 x}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{2\sin^3 x \cdot \cos x + 4\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^2 x - 1}{\cos^3 x}.$$

3.5.5. Производные обратных тригонометрических функций

Формулы для производных обратных тригонометрических функций могут быть получены с помощью теоремы о производной обратной функции.

Производная арксинуса

Пусть $y=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$. Концы отрезка $x=\pm1$ не берутся, так как производная в них не существует, поскольку обратная функция $x=\sin y$ имеет в соответствующих точках $y=\pm\frac{\pi}{2}$ нулевую производную.

Тогда $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $x=\sin y$, $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Здесь перед корнем квадратным берется знак «+», поскольку при $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos y>0$. С учетом сказанного получаем

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная арккосинуса

Пусть $y=\arccos x$, $x\in(-1;1)$. Воспользуемся формулой, связывающей значения арккосинуса с арксинусом: $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, $x\in[-1;1]$.

С учетом сказанного получаем

$$y'=(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 3.23

Докажем тождество $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $x\in[-1;1]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, $x\in[-1;1]$. Она непрерывна на своей области определения. Найдем ее производную:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0\ \forall x\in(-1;1).$$

По теореме Лагранжа для любых двух точек x_1, x_2 интервала имеем: $f(x_1)-f(x_2)=f'(c)\cdot(x_1-x_2)$, $c\in(x_1;x_2)$. Но поскольку производная $f'(x)$ тождественно равна нулю, то $f(x_1)=f(x_2)\forall x_1,x_2\in(-1;1)$. Значит, функция $f(x)$ является константой: $\arcsin x+\arccos x=C$, $x\in(-1;1)$. Для определения этой константы достаточно подставить произвольное значение x, например $x=0$: $C=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

В точках $x=\pm1$ это равенство также выполняется (проверьте самостоятельно).

Производная арктангенса

Пусть $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$. Тогда $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x = \operatorname{tg} y$ и $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, или $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. С учетом сказанного получаем

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Производная арккотангенса

Для вычисления производной арккотангенса воспользуемся формулой, связывающей значения арккотангенса с арктангенсом: $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда получим

$$y' = (\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = 0 - (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 3.24

Вычислим производную функции $y = 2\arcsin x - 3\operatorname{arctg} 2x$.

Решение. В соответствии с выведенными формулами имеем

$$y' = (2\arcsin x - 3\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{3}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{6}{1 + 4x^2}.$$

3.5.6. Таблица производных основных элементарных функций

В приведенной ниже табл. 3.1 собраны выведенные выше формулы производных. В ней x является переменной величиной, по которой берется производная. Остальные буквы обозначают параметры, которые считаются постоянными при вычислении производной.

Таблица 3.1

Таблица производных

Функция	Производная
$f(x) \equiv C = \text{const}$	$f'(x) = 0$
$f(x) \equiv x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^\alpha$ $x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ при $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$; $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ при $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha > 1$; $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ при $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha < 1$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
$f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{2n\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$

Окончание табл. 3.1

Функция	Производная
В частности, $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $x\neq 0$	$f'(x)=\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$
$f(x)=a^x$, $a>0$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$
В частности, $f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1, x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}$
В частности, $f(x)=\ln x, x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x, x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{ctg} x, x\neq\pi n$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x, x\in(-1;1)$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x, x\in(-1;1)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Пример 3.25

Найдем производную функции $y=\operatorname{tg}(\cos(\sin x))$.

Решение. Имеем

$$y'=(\operatorname{tg}(\cos(\sin x)))'=\frac{1}{\cos^2(\cos(\sin x))}\cdot(-\sin(\sin x))\cdot\cos x.$$

Пример 3.26

Найдем значение производной функции $y=|x^2-5x+4|-e^{2x-x^2}$ в точках $x_1=0$ и $x_2=2$.

Решение. При $x_1=0$ и в некоторой окрестности этой точки (в силу непрерывности квадратичной функции) выражение под знаком модуля положительное. Поэтому

$$y=|x^2-5x+4|-e^{2x-x^2}=x^2-5x+4-e^{2x-x^2}.$$

Дифференцируем функцию: $y' = (x^2 - 5x + 4 - e^{2x-x^2})' = 2x - 5 - e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)$.

Положим в этом равенстве $x = 0$: $y'(0) = -5 - 1 \cdot 2 = -7$.

При $x_2 = 2$ и в некоторой окрестности этой точки выражение под знаком модуля отрицательное и поэтому $y = |x^2 - 5x + 4| - e^{2x-x^2} = -x^2 + 5x - 4 - e^{2x-x^2}$.

Дифференцируем функцию: $y' = (-x^2 + 5x - 4 - e^{2x-x^2})' = -2x + 5 - e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)$.

Положим в этом равенстве $x = 2$: $y'(2) = -4 + 5 - 1 \cdot (-2) = 3$.

Пример 3.27

Докажем неравенство $|\arccos x - \arccos y| \geq |x - y|$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = \arccos t$. Эта функция непрерывна на отрезке $[-1; 1]$ и дифференцируема на интервале $(-1; 1)$. По теореме Лагранжа для любых точек x и y $(-1 \leq x < y \leq 1)$ существует такая точка $t \in (x; y)$, что $f(x) - f(y) = f'(t) \cdot (x - y)$, или

$$\arccos x - \arccos y = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (x - y).$$

Отсюда следует

$$|\arccos x - \arccos y| = \left| -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right| \cdot |x - y| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot |x - y|.$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geq 1$, то $|\arccos x - \arccos y| \geq |x - y|$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Какие ограничения на переменную и параметр (и почему) введены в общую формулу для производной степенной функции?
2. Объясните, почему формулы для производных константы и линейной функции вынесены в отдельную графу (а не включены в разряд степенных при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$).
3. Можно ли было не выносить в отдельные графы формулы для производных функций $f(x) = \sqrt[2n]{x}$ и $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$?
4. Почему в формулы для производных арксинуса и арккосинуса не включены точки $x = -1$ и $x = 1$?

Упражнения

3.39. Вычислите производную функции $y = \sqrt[4]{x}$ двумя способами: с помощью теоремы о производной обратной функции и с помощью формулы для степенной функции.

3.40. Вычислите производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}}{x - 1}$; б) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}$; в) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$; г) $y = 2\sqrt{x\sqrt[4]{x^5}}$;

д) $y = \dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x\sqrt[5]{x-1}}} - 3\sqrt{x+2}$.

3.41. Найдите формулу для суммы $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$.

3.42*. Найдите формулу для суммы $S_n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} nx^{n-1}$.

3.43. Вычислите производные следующих функций:
а) $y=e^{2x}$; б) $y=3e^{-x}+3^{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{4e^{-x}\cdot 3^{2x+3}}$.

3.44. Вычислите производные следующих функций:
а) $y=\log_3 x^2$; б) $y=\lg(2x^2+3x-1)$; в) $y=\ln\sqrt{x^2-2x-1}$; г)* $y=(2+\sin x)^x$;
д)* $y=x^{\cos x}$, $x>0$.

3.45. Вычислите производные следующих функций:
а) $y=\operatorname{ctg} 2x$; б) $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$; в) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\sin x}{\cos x}$; г) $y=\sin^2 x+\sin x^2$;
д) $y=\sin(\cos x)$; е) $y=\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)$; ж) $y=\sin^2(x^2)-3\cos^3(x-x^2)$.

3.46. Вычислите производные следующих функций:
а) $y=3\operatorname{arcctg} 4x$; б) $y=\operatorname{arcctg} 2x+\operatorname{arctg} 2x$; в) $y=2\arcsin x\cdot\arccos x$.

3.47. Докажите тождества: а) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.48. Вычислите производную функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\operatorname{arctg} x$. Какой вывод следует из результата?

3.49. Докажите неравенство $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|\ \forall x,y$.

3.50. Вычислите производные следующих функций и укажите области их определения:
а) $y=x^{\sqrt{2}}$; б) $y=x^2\ln x$; в) $y=x\cdot\sin x+x^2\cdot\operatorname{arctg} x$; г) $y=\ln\dfrac{x-2}{x-5}-\sqrt{x-6}$; д) $2^x\cos x^2$;
е) $y=\dfrac{\log_2 x}{x}$; ж) $y=\sin(\cos x)$; з) $y=\sqrt{\ln\sin x}$; и) $y=\sqrt{\ln(2\sin x+1)}$;
к) $y=e^{2x}\ln(x^2+3x+2)$; л) $y=(x^2-3x+1)^5$; м) $y=(3x+1)^3(x-1)^5$;
н) $y=(x^2-3x+1)^3(2x^3+x-1)^4$; о) $y=\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}$; п) $y=\sqrt{x\sqrt[5]{x}}$; р) $y=2^x\cdot\sin x$;
с) $y=\dfrac{\log_2 x}{\cos x}$; т) $y=\sin^3 x+\sin(x^3)$.

3.51. Найдите значения производных в точке x_0 следующих функций:
а) $y=\ln x$, $x_0=1$; б) $y=2^{x^2-x}$, $x_0=2$;
в) $y=\arccos\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, $x_0=-1$; г) $y=\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

3.52. Даны две функции: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ и $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. Выведите формулу для сложных функций: а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$; в) $g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$. Для каждой из них укажите область определения. Найдите производные от вычисленных функций двумя способами: по правилу дифференцирования сложной функции и непосредственно дифференцируя вычисленную функцию. Сравните результаты.

3.53. Найдите все значения параметров, при которых данная функция будет дифференцируема на всей области определения:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+2, & x>0,\\ ax+3-b, & x\le 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}3-ax^2, & x>1,\\ (2-3a)x+b, & x\le 1.\end{cases}$

3.54. Точка движется по прямой так, что ее координата в момент времени t равна $x(t)=e^{1+2t}-3t^3$. Время измеряется в секундах, координата — в метрах. Найдите скорость точки в моменты времени: а) $t=0$; б) $t=1$.

3.55. Точка M движется по окружности радиуса $R=2$ м с центром в точке O, так что угол, образуемый прямой OM с положительным направлением оси Ox, изменяется со временем по закону $\alpha(t)=\cos(3-2t)-2^{3t+1}$. Угол измеряется в радианах, время — в секундах. Каковы угловая скорость и мгновенная скорость в моменты времени: а) $t=0$; б) $t=1$?

3.56. Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите неравенства:

а) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$;

б) $|\cos x-\cos y|\le|x-y|,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$;

в) $|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\ge|x-y|,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\ y\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $|\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y|\ge|x-y|,\ x\in(0;\pi),\ y\in(0;\pi)$.

3.6. Уравнение касательной

Как уже отмечалось в параграфе 3.1, одной из задач, приведшей к понятию производной, была задача о построении касательной к произвольной кривой. С помощью производной, как оказалось, уравнение касательной можно записать очень просто. Посмотрим, как это делается. Но сначала уточним, что такое касательная.

В курсе геометрии касательная к окружности определялась как прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная к окружности — это частный случай касательной, и в общем случае подобное определение не годится. Действительно, рассмотрим пример кубической параболы $y=\dfrac{1}{3}x^3$ и проведем к ней касательную, например, в точке с абсциссой $x=1$ (рис. 3.13).

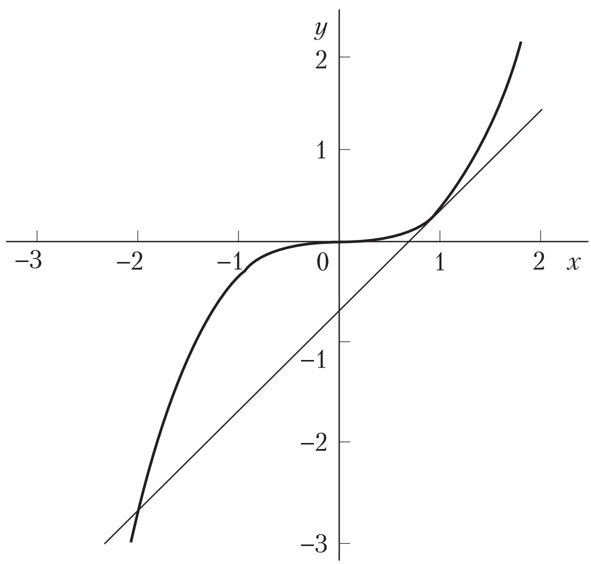


Рис. 3.13. **Касательная к кубической параболе**

Как очевидно из рисунка, касательная имеет, кроме точки касания, еще одну точку пересечения с кубической параболой. Таким образом, нужно подыскать определение, более подходящее для общего случая.

Для этого воспользуемся приемом, описанным в параграфе 3.1. Проведем секущую, проходящую через рассматриваемую точку $(x_0, f(x_0))$ будущего касания и некоторую другую точку $(x', f(x'))$ (рис. 3.14), а затем будем приближать x' к x_0 (рис. 3.15 — точки $x'_1, x'_2, ..., x'_n \to x_0$). В пределе, когда точка x' сольется с точкой x_0, мы получим некоторую прямую линию, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$. Эту линию и объявим касательной. Построенная таким образом прямая линия обладает тем свойством, что она плотнее всех других линий прилегает к нашей кривой в ближайшей окрестности точки x_0 — чем меньше окрестность, тем плотнее она прилегает, и для достаточно малых окрестностей почти сливается с ней. Таким образом, в достаточно малой окрестности с пренебрежимо малой погрешностью кривая может быть заменена (приближена) отрезком касательной.

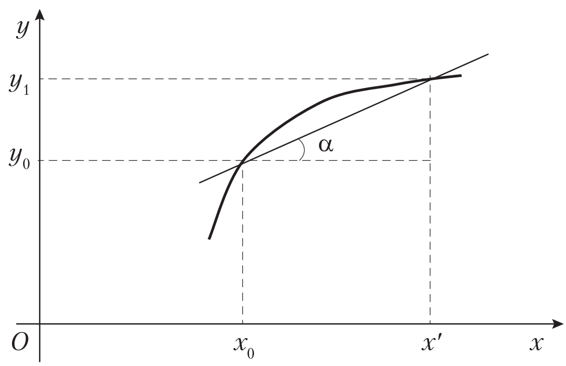


Рис. 3.14. **Секущая**

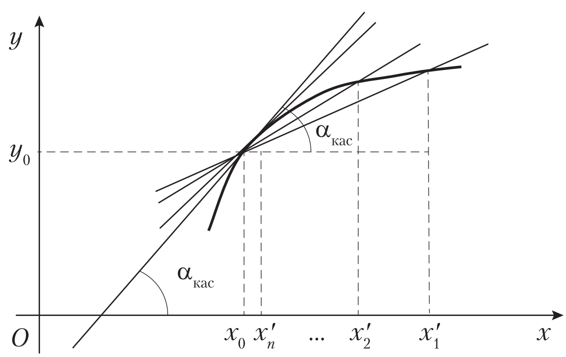


Рис. 3.15. **К определению касательной**

Итак, дадим следующее определение касательной.

Определение 3.3. *Касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 называется предельное положение секущей, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x', f(x'))$, когда точка x' стремится к x_0, если это положение не зависит от способа стремления $x' \to x_0$.

Это определение не очень строгое, но оно поясняет существо понятия касательной. Более четкое определение касательной мы получим, выведя ее уравнение.

Итак, пусть заданы функция $f(x)$ и точка x_0 и требуется написать уравнение касательной к кривой, описываемой этой функцией и проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$.

Как мы знаем, уравнение прямой линии можно построить, зная точку, через которую она проходит, и ее угловой коэффициент. Точка нам задана. Кстати, для кривой, описываемой функцией, достаточно задать только аргумент x_0, поскольку значение функции $f(x_0)$ по аргументу определяется однозначно. А как мы видели в параграфе 3.1, угловой коэффициент k касательной равен производной функции $f(x)$, взятой в точке x_0, т.е. $k = f'(x_0)$. Таким образом, все необходимые данные для написания уравнения касательной имеются.

Как мы знаем, уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$, с угловым коэффициентом k имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Подставляя в это уравнение известные величины, получим: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0). \tag{3.1}$$

Пример 3.28

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3.1) и тем, что $(x^2)' = 2x$, получим: $y = f(2) + f'(2)\cdot(x-2)$, или $y = 2^2 + 2\cdot 2\cdot(x-2)$, или $y = 4 + 4\cdot(x-2)$, или, окончательно, $y = 4x - 4$.

Ответ: $y = 4x - 4$.

Пример 3.29

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, проходящей через точку M (1; 3).

Решение. Заметим, что в этом примере точка $M(1;\ 3)$ не лежит на графике функции $f(x)$.

Пусть x_0 — точка касания. Тогда уравнение касательной примет вид

$$y = 2x_0^3 - 5x_0^2 + x_0 + 2 + (6x_0^2 - 10x_0 + 1)(x - x_0).$$

Поскольку по условию касательная проходит через точку (1; 3), после подстановки соответствующих координат получаем уравнение для нахождения точки касания:

$$3 = 2x_0^3 - 5x_0^2 + x_0 + 2 + (6x_0^2 - 10x_0 + 1)(1 - x_0).$$

После упрощения получим кубическое уравнение

$$4x_0^3 - 11x_0^2 + 10x_0 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_0 = 0$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид $y = x + 2$.

Ответ: $y = x + 2$.

Пример 3.30

Найдем площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = \dfrac{8x+4}{x^2 - 2x + 5}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Имеем

$$y(1)=3;\ y'=\frac{8(x^2-2x+5)-(8x+4)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2};\ y'(1)=2.$$

Уравнение касательной имеет вид $y = 3 + 2(x - 1)$, или $y = 2x + 1$.

Касательная пересекает оси координат в точках $M_1(0;\ 1)$ и $M_2(-0{,}5;\ 0)$. Таким образом, площадь треугольника равна $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}5=\frac{1}{4}$.

Ответ: $S=\frac{1}{4}$.

Пример 3.31

Прямая касается графика функции $y=\frac{11}{x-7}$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$. Найдем абсциссу x_2 точки касания этого графика другой прямой, параллельной данной.

Решение. Ввиду параллельности касательных их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент касательной в точке $x_1 = 1$ равен $k=y'(x_1)=-\frac{11}{(x_1-7)^2}=-\frac{11}{36}$.

Для другой прямой $k=y'(x_2)=-\frac{11}{(x_2-7)^2}=-\frac{11}{36}$.

Из этого уравнения получаем два значения для x_2: $(x_2-7)^2=36 \Rightarrow (x_2-7)=\pm 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 = 13$ и $x_2 = 1$. Но $x_2 = 1$ — это точка касания первой прямой. Поэтому $x_2 = 13$.

Приведем другой способ решения этой задачи, основанной на свойствах гиперболы и симметричных отображений (рис. 3.16). Заметим, что гипербола $y=\frac{11}{x-7}$ симметрична относительно точки (7; 0) пересечения асимптот. Касательная в точке $x_1 = 1$ при симметрии относительно точки (7; 0) отобразится в параллельную ей касательную к другой ветви гиперболы. Точка касания также отобразится в симметричную ей точку. Поэтому абсцисса x_2 искомой точки и точка $x_1 = 1$ на оси абсцисс симметричны относительно точки $x_0 = 7$. И тогда по свойству симметрии $7=\frac{1+x_2}{2} \Rightarrow x_2=13$.

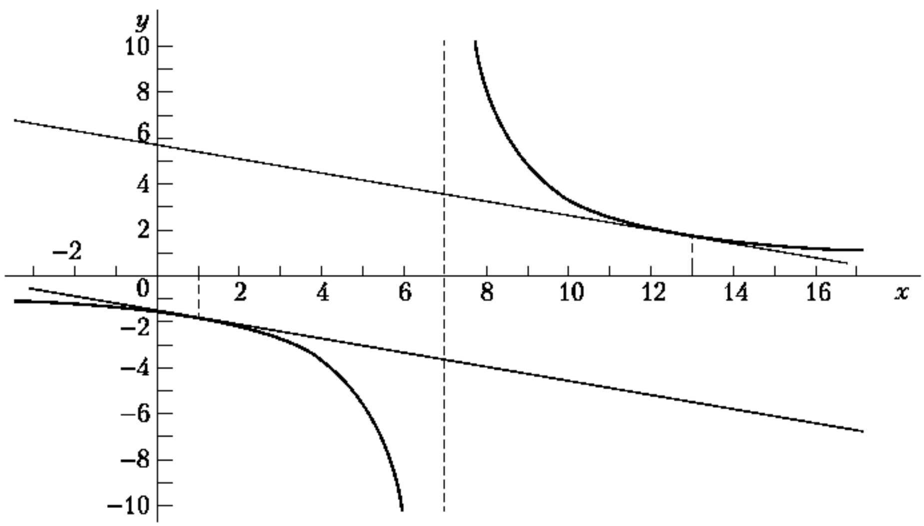


Рис. 3.16. **К примеру 3.31**

Ответ: 13.

Пример 3.32

Найдем угол между касательными к графикам функций $f(x) = x^3 + x^2 - 4$ и $g(x) = x^2 - 3x$, проведенными в точке их пересечения.

Решение. Найдем точки пересечения графиков. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 - 4, \\ y = x^2 - 3x. \end{cases}$$

Приравнивая правые части, получим

$$x^3 + x^2 - 4 = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Поскольку $h(x) = x^3 + 3x - 4$ — возрастающая функция (сумма двух возрастающих функций $h_1(x) = x^3$ и $h_2(x) = 3x - 4$), то уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$. Точка пересечения графиков функций — $(1; -2)$. Угловые коэффициенты касательных к графикам в этой точке равны соответственно

$$k_f = f'(1) = (3x^2 + 2x)\big|_{x=1} = 5;$$
$$k_g = g'(1) = (2x - 3)\big|_{x=1} = -1.$$

Угол между прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_f - k_g}{1 + k_f \cdot k_g}\right| = \left|\frac{5 - (-1)}{1 + 5\cdot(-1)}\right| = 1{,}5.$$

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} 1{,}5$.

Пример 3.33

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, если эта касательная не имеет общих точек с прямой $3x + y - 2 = 0$.

Решение. Касательная не имеет общих точек с прямой $3x + y - 2 = 0$, если она параллельна ей, т.е. угловые коэффициенты касательной и данной прямой должны совпадать: $-2x + 3 = -3 \Leftrightarrow x = 3$. Поскольку $f(3) = -2$, то уравнение касательной имеет вид $y = -2 - 3(x - 3)$, или $y = -3x + 7$.

Ответ: $y = -3x + 7$.

Пример 3.34

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, если эта касательная отсекает от осей координат равнобедренный треугольник.

Решение. Касательная отсекает от осей координат равнобедренный треугольник тогда и только тогда, когда угловой коэффициент касательной равен 1 или -1. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = 1, \\ f'(x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x + 3 = 1, \\ -2x + 3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Поскольку значения функции в точках касания равны нулю, то уравнения касательных имеют вид $y = 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$ и $y = 0 - 1 \cdot (x - 2) = 2 - x$.

Ответ: $y = x - 1$; $y = 2 - x$.

Пример 3.35

Пусть задана функция $y = ax^r$, $x > 0$, $ar \neq 0$. В точке x_0 проведена касательная к функции, пересекающая ось абсцисс в точке x_1. Докажем, что $x_0 - x_1 = \dfrac{x_0}{r}$.

Решение. Запишем уравнение касательной в точке x_0: $y = ax_0^r + arx_0^{r-1}(x - x_0)$.

Подставим координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс $(x_1;\ 0)$ в уравнение касательной: $0 = ax_0^r + arx_0^{r-1}(x_1 - x_0)$. Отсюда после деления на ax_0^r получим доказываемое равенство.

Пример 3.36

Определим, при каких значениях параметра a графики функций $f(x) = 4 - x^2$ и $g(x) = x^2 - 2x + a$ имеют общую точку касания. Найдем абсциссу точки касания.

Решение. Запишем условие касания двух функций $f(x)$ и $g(x)$. Заметим, что в точке касания совпадают значения функций, т.е. $f(x) = g(x)$. Кроме того, у этих функций совпадают касательные в этой точке, что равносильно равенству производных: $f'(x) = g'(x)$. Следовательно, для нахождения точки касания следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = x^2 - 2x + a, \\ -2x = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2x^2 + 2x + 4, \\ x = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4{,}5, \\ x = 0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $a = 4{,}5$, $x = 0{,}5$.

Пример 3.37

Параметр k таков, что уравнение $\sqrt[3]{x-3} = kx$ имеет два различных корня. Найдем больший корень этого уравнения.

Решение. Преобразуем данное уравнение в равносильную (по переменной x) систему $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x-3}, \\ y = kx \end{cases}$ и изобразим графики функций $y = \sqrt[3]{x-3}$ и $y = kx$ так, чтобы они имели две общие точки (рис. 3.17).

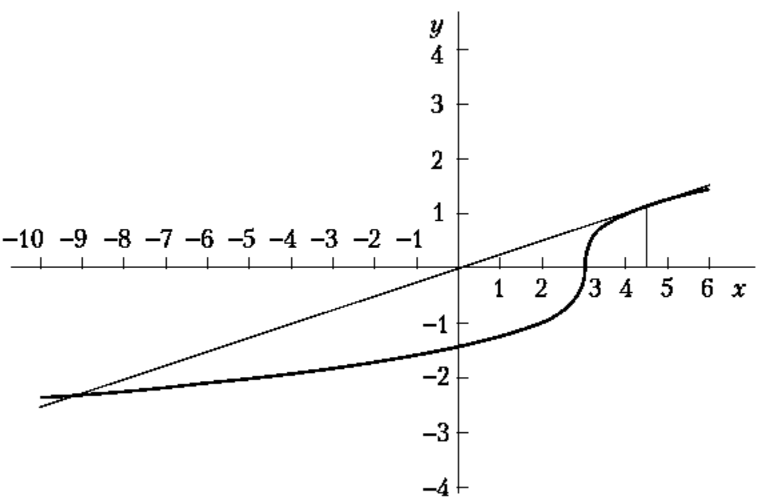


Рис. 3.17. **К примеру 3.37**

Прямая $y = kx$ при любом k проходит через начало координат (пучок прямых). Два пересечения будет, очевидно, только в случае, когда прямая $y = kx$ является касательной к графику функции $y=\sqrt[3]{x-3}$. В противном случае будет либо одно, либо три пересечения.

Из рисунка очевидно, что абсцисса x_0 точки касания будет бо́льшим решением уравнения. Найдем x_0.

Условие касания означает, что в точке касания значения функций $y=\sqrt[3]{x-3}$ и $y = kx$, а также значения их производных совпадают, поскольку производная — это угловой коэффициент касательной. Итак, для нахождения точки касания x_0 имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-3}=kx,\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}=k.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $3(x - 3) = x$, откуда $x = 4,5$.

Ответ: $x = 4,5$.

Пример 3.38

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, параллельной прямой $2x - y - 1 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент прямой равен 2. Следовательно, и касательная, параллельная этой прямой, должна иметь такой же угловой коэффициент. Требуется найти такую точку x, в которой производная функции $f(x)$ равна 2. Имеем:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x-4,\ x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty),\\ -x^2+3x+4,\ x\in[-1;4].\end{cases}$$

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3,\ x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty),\\ -2x+3,\ x\in[-1;4].\end{cases}$$

Отсюда получим

$$\left[\begin{array}{l}2x-3=2,\ x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty),\\ -2x+3=2,\ x\in[-1;4]\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,5,\ x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty),\\ x=0,5,\ x\in[-1;4]\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0,5.$$

Вычислим значение функции в точке $x = 0,5$: $f(0,5)=-0,25+1,5+4=5,25$.

Уравнение касательной: $y = 5,25 + 2(x - 0,5)$, или $y = 2x + 4,25$.

Ответ: $y = 2x + 4,25$.

Пример 3.39

Составим уравнение общей касательной к графикам функций $y = 2x^2 + 2x + 9$ и $y = 6 - x^2$.

Замечание 3.2. Точки касания прямой и этих двух парабол, вообще говоря, разные. Они совпадают лишь тогда, когда параболы касаются друг друга.

Решение. Итак, пусть x_1 и x_2 — точки касания соответствующих парабол с общей касательной. Напишем уравнение касательной. Из условия касания для первой параболы получим

$$y=f_1(x_1)+f_1'(x_1)(x-x_1)=2x_1^2+2x_1+9+(4x_1+2)(x-x_1)=(4x_1+2)x+(-2x_1^2+9).$$

Из условия касания второй параболы имеем

$$y=f_2(x_2)+f_2'(x_2)(x-x_2)=6-x_2^2+(-2x_2)(x-x_2)=-2x_2x+(x_2^2+6).$$

Поскольку оба уравнения описывают одну и ту же прямую, у них должны совпадать угловые коэффициенты и свободные члены, т.е.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2 = -2x_2, \\ -2x_1^2 + 9 = x_2^2 + 6. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{5}{3}$ и $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

Таким образом, существуют две общие касательные (рис. 3.18): $y = \frac{10}{3}x + \frac{79}{9}$ и $y = -2x + 7$.

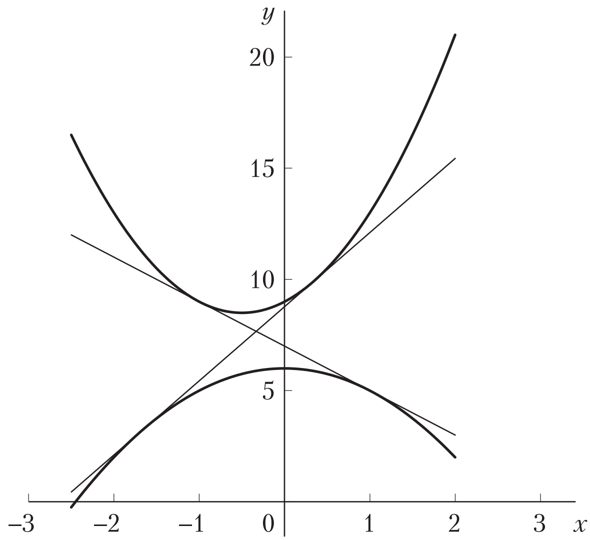


Рис. 3.18. **К примеру 3.39**

Ответ: $y = \frac{10}{3}x + \frac{79}{9}$ и $y = -2x + 7$.

Как очевидно из уравнения касательной, она в заданной точке существует всегда, когда в этой точке существует производная. Обратное, вообще говоря, не верно. Так, могут существовать вертикальные касательные к кривой, описываемой некоторой функцией, а (конечная) производная в этом случае не существует, поскольку у вертикальной прямой не существует углового коэффициента (тангенс прямого угла не существует) (см. рис. 3.6).

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Можно ли определить касательную к параболе, гиперболе как прямую, имеющую с ней одну общую точку? Не возникнет ли при этом противоречия с общим определением касательной?
2. Могут ли существовать две касательные к кривой в одной и той же точке?
3. Может ли через одну и ту же точку проходить две касательные к параболе?

4. Может ли касательная пересекать кривую бесконечное число раз?

5. Может ли прямая касаться кривой в нескольких точках?

6. Может ли кривая в некоторой точке не иметь касательной?

7. Может ли график функции не иметь касательных ни в одной точке?

8. Имеет ли график функции $y = kx + b$ касательную?

9. Поясните, что означает, что две кривые касаются друг друга в точке x_0. Дайте определение.

Упражнения

3.57. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2$ в точке $x = -1$.

3.58. Напишите уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y = \frac{1}{x}$, в точке $x = 1$.

3.59. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 4$, проведенной через точку пересечения этого графика с осью ординат.

3.60. Приведите пример функции, график которой лежит по обе стороны от наклонной касательной, проведенной к некоторой его точке.

3.61. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^3 - 12x^2 + 45x + 9 = a$ имеет не менее двух решений.

3.62. Найдите площадь треугольника, образованного отрезком оси абсцисс и отрезками касательных к графику функции $y = x^2 - 8x + 7$, проведенными в точках графика с абсциссами $x = 1$ и $x = 7$.

3.63. Найдите площадь треугольника, образованного асимптотами графика функции $y = \frac{5x+4}{x-3}$ и касательной к этому графику, проходящей через точку $M(4; 24)$.

3.64. Найдите угол между касательными к графикам функций $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ и $g(x) = \frac{x}{6}$, проведенными в точках их пересечения.

3.65*. Найдите площадь фигуры, все точки которой лежат выше двух различных касательных к графику функции $y = x^2 - 6x + 12$, проходящих через точку $A(2; 0)$, но ниже двух различных касательных к графику функции $y = -0{,}25x^2 + x - 1$, проходящих через точку $B(2; 4)$.

3.66. Прямая касается графика функции $y = \frac{2x-1}{x+5}$ в точке с абсциссой $x_1 = -4$. Найдите абсциссу x_2 точки касания этого графика другой прямой, параллельной данной. Напишите уравнение этой касательной.

3.67. Прямая касается графика функции $y = x^2 - x + 3$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$. Напишите уравнение касательной к этому графику, перпендикулярной к указанной касательной.

3.68. Значение параметра $p > 0$ таково, что уравнение $\cos x = px$ имеет ровно четыре корня. Чему равно значение выражения $x_0 + \operatorname{ctg} x_0$, если x_0 — больший из них?

3.69. Параметр a таков, что уравнение $\sqrt[5]{2-x} = ax$ имеет два различных корня. Найдите больший корень этого уравнения.

3.70. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^3$.

3.71. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 2x^2 - 2x + 7$ и $y = 5 - x^2 + 2x$.

3.72. На графике функции $y=\frac{x^3}{3}-2x^2-22x-28$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику образует с положительными полуосями координат равнобедренные треугольники.

3.73. При каких значениях параметра a касаются графики функций $f(x)=2x^2+x+1$ и $g(x)=ax^2-x$? Найдите абсциссу точки касания.

3.74. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, параллельной прямой $x+2y-3=0$.

3.75. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, перпендикулярной прямой $2x+y+7=0$.

3.76. Докажите, что касательная к гиперболе $xy=k$, $k\neq 0$, образует с осями координат треугольник постоянной площади.

3.77. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=|x^2-x-2|$, если известно, что она не пересекается с прямой $x+2y-3=0$.

3.78. На графике функции $y=x^2+3x+2$ найдите точку, ближайшую к точке $M(16;\,10)$.

3.79. Найдите расстояние от точки $M(0;-2)$ до графика функции $y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2, x>0$.

3.7*. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл

Как мы уже отмечали, производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ сама может рассматриваться как функция аргумента x. Таким образом, закономерной является постановка вопроса о вычислении производной от функции $f'(x)$. Если такая производная существует, она называется *второй производной* от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Каков смысл вычисления второй производной? Оказывается, что, так же как и первая производная, вторая производная имеет определенный геометрический и физический смысл.

Посмотрим, какой *геометрический* смысл заключен во второй производной. Как мы уже говорили, если производная в точке x_0 положительна, то в некоторой окрестности справа значения функции больше, чем в самой точке, а слева — меньше (см. теорему 3.2). Таким образом, если вторая производная в этой точке положительна, то это означает, что в некоторой ее окрестности при $x<x_0$ $f'(x)<f'(x_0)$, а при $x>x_0$ $f'(x)>f'(x_0)$, т.е. угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ слева от точки x_0 меньше, чем в точке x_0, а справа — больше, чем в точке x_0.

На рис. 3.19 изображен график некоторой функции $y=f(x)$, который в точке x_0 имеет касательную l_0. Касательные l_1 в точках, лежащих левее x_0, имеют меньший угол наклона к оси Ox, чем l_0, а касательные l_2 в точках, лежащих правее x_0, имеют больший угол наклона к оси Ox, чем l_0. Таким образом, как очевидно из рисунка, график функции в некоторой окрестности точки x_0 лежит выше касательной l_0.

Если же вторая производная отрицательна в точке x_0, то в некоторой окрестности точки x_0 график функции будет лежать под касательной, проведенной в точке x_0 (рис. 3.20).

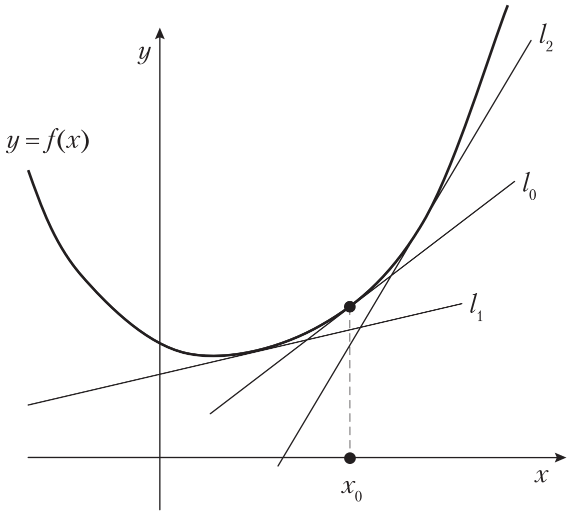


Рис. 3.19. **График функции с положительной второй производной в точке x_0**

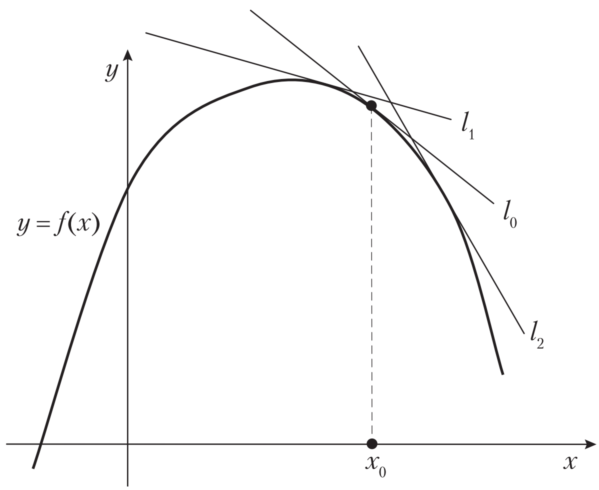


Рис. 3.20. **График функции с отрицательной второй производной в точке x_0**

Определение 3.4. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой на промежутке D*, если отрезок, соединяющий любые две точки графика функции $y = f(x)$, лежит не ниже самого графика, т.е.

$$x_1, x_2 \in D, \alpha \in (0;1) \Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ является *вогнутой на промежутке D*, если отрезок, соединяющий любые две точки графика функции $y = f(x)$, лежит не выше самого графика, т.е.

$$x_1, x_2 \in D, \alpha \in (0;1) \Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Можно доказать (по индукции), что определение 3.4 равносильно следующему.

Функция $y = f(x)$ является *выпуклой на промежутке D*, если для любых $x_1, x_2, ..., x_n$, принадлежащих D, и для любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, в сумме составляющих единицу, выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n).$$

Для вогнутой функции

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \ge \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n).$$

Докажем, используя понятие вогнутости, неравенство Коши (о среднем арифметическим и среднем геометрическом n неотрицательных чисел).

Теорема 3.10 (Коши). *Среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, т.е. для любых* $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, ..., $x_n \ge 0$ *имеем*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

причем знак неравенства превращается в знак равенства тогда и только тогда, когда все числа равны между собой.

Доказательство. Если хотя бы одно из чисел равно нулю, то неравенство выполняется, поскольку в правой части получится нуль. Если все числа положительные, то

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})} = e^{\frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + ... + \frac{1}{n}\ln(x_n)} \le e^{\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)} =$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Здесь мы воспользовались вогнутостью функции $f(x) = \ln x$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$. ■

Можно доказать, что если $f''(x) \ge 0$ в каждой точке промежутка, то функция $f(x)$ будет выпуклой на этом промежутке, а если $f''(x) \le 0$ в каждой точке промежутка, то она будет вогнутой на нем.

В случае когда вторая производная равна нулю в точке x_0, в ее окрестности функция может быть либо выпуклой (рис. 3.21, *а*), либо вогнутой (рис. 3.21, *б*), либо с одной стороны выпуклой, а с другой — вогнутой, в этом случае x_0 будет точкой перегиба (рис. 3.21, *в*). Возможны и более сложные случаи, о которых мы упоминать не будем.

Теорема 3.11 (неравенство Бернулли). *Для* $x > -1$ *имеют место неравенства:*

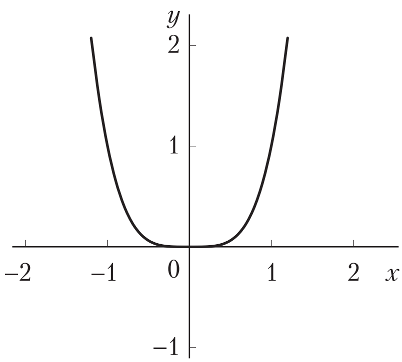
а) *если* $p < 0$ *или* $p > 1$, *то* $(1 + x)^p \ge 1 + px$; (1)

б) *если* $0 < p < 1$, *то* $(1 + x)^p \le 1 + px$. (2)

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^p$, $x > -1$.

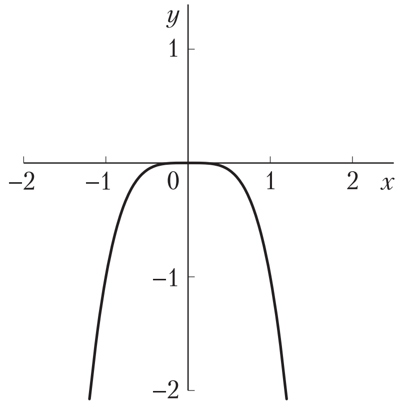
Вычислим первую и вторую производные:

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}; \; f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}.$$



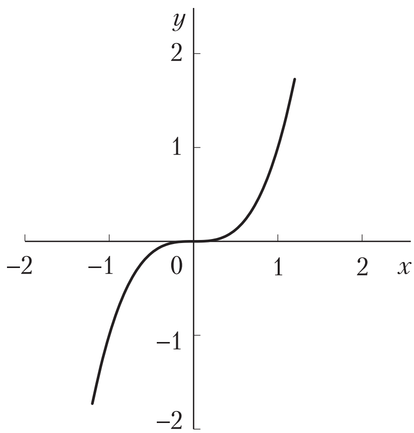
$y = x^4, y''(0) = 0$

а



$y = -x^4, y''(0) = 0$

б



$y = x^3, y''(0) = 0$

в

Рис. 3.21. **Разные виды функции в случае равенства второй производной нулю в точке x_0**

Уравнение касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$:

$$y = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 1 + px.$$

Поскольку при $p < 0$ или $p > 1$ вторая производная положительна во всех точках $x > -1$, кроме самой точки -1, где она обращается в нуль, то функция $f(x)$ строго выпуклая, и это значит, что ее график лежит всюду выше касательной, кроме самой точки $x_0 = -1$, где происходит касание графика с касательной. Отсюда следует неравенство (1).

При $0 < p < 1$ знак второй производной отрицателен, и функция является вогнутой. Ее график лежит всюду ниже касательной, кроме самой точки $x_0 = -1$, где происходит касание графика с касательной. Отсюда следует неравенство (2). ■

Пример 3.40

Решим уравнение $\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{1-x^2}=4$.

Решение. Область определения уравнения: $x \in [-1; 1]$.

Используем неравенство Бернулли:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{0,5}\le 1+0,5x;$$

$$\sqrt[4]{1+x^2}=(1+x)^{0,25}\le 1+0,25x^2;$$

$$\sqrt{1+(-x)}=[1+(-x)]^{0,5}\le 1+0,5(-x);$$

$$\sqrt[4]{1+(-x^2)}=[1+(-x^2)]^{0,25}\le 1+0,25(-x^2).$$

Сложив эти неравенства, получим $\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{1-x^2}\le 4$.

Очевидно, чтобы последнее неравенство выполнялось как равенство, необходимо и достаточно, чтобы все предыдущие неравенства выполнялись как равенства. Это будет только в одной точке $x = 0$.

Вторая производная допускает также *физическую* интерпретацию. Как мы уже отмечали, первая производная характеризует скорость изменения значения функции: чем больше положительное значение производной, тем быстрее растет значение функции в окрестности рассматриваемой точки; чем больше по модулю отрицательное значение производной, тем быстрее убывает значение функции в окрестности точки. Вторая же производная, таким образом, характеризует скорость роста (убывания) первой производной, т.е. скорость изменения скорости возрастания или убывания значения функции. Иными словами, она определяет ускорение изменения функции.

Таким образом, если функция $x = x(t)$ задает зависимость положения движущейся точки от времени, то ***первая производная $x'(t)$ определяет скорость ее движения, а вторая $x''(t)$ — ускорение.***

Пример 3.41

Движение автомобиля по прямолинейному участку дороги в некоторый период $t \in [0; 5]$ (с) разгона после старта описывается функцией $x = 2t^2$ (м). Найдем скорость и ускорение его движения на этом участке.

Решение. Скорость определяется функцией $x'(t)=(t^2)'=4t$ (м/с), а ускорение — $x''(t)=4$ (м/с^2). Скорость при разгоне машины линейно возрастала, достигнув к концу разгона величины 20 м/с. Ускорение на всем участке разгона оставалось постоянным, равным 4 м/с^2.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Каков геометрический и физический смысл второй производной?

2. Может ли одна и та же функция быть выпуклой и вогнутой на отрезке одновременно?

3. Покажите, что условие непрерывности функции не является необходимым условием выпуклости на промежутке D. Приведите контрпример.

Упражнения

3.80. Вычислите вторую производную функции $y = \dfrac{x+1}{2x^2+3}$ и определите ее значение в точке $x = 1$.

3.81. Вычислите вторую производную функции $y = 2x^3$ и найдите промежутки выпуклости и вогнутости этой функции.

3.82. Велосипедист стартовал в момент времени $t = 0$ на прямолинейном участке шоссе от пункта A. Зависимость пройденного расстояния (в метрах) от времени (в секундах) на первоначальном участке пути выражается формулой $x = 0{,}01t^3 + 0{,}2t^2 + 3t$. Найдите скорость и ускорение велосипедиста через 10 с после старта.

3.83*. Приведите пример функции, имеющей в точке $x = 0$ положительную вторую производную, но не являющейся выпуклой ни в какой ее окрестности.

3.84. Приведите пример функции, для которой существует $f'(x)$, но не существует (хотя бы в одной точке) $f''(x)$.

3.85. Решите уравнение $(1+2x)^6 + (1-3x)^4 = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{1+2x}$.

3.86. Найдите множество значений функции $f(x) = \sqrt[8]{1-x} + \sqrt{1+\dfrac{x}{4}}$.

Глава 4
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- определения экстремумов функции, асимптот;
- схему исследования функций;

уметь

- вычислять экстремумы функции и строить графики функций в соответствии со схемой их исследования;
- использовать производные функций для решения задач на нахождение оптимального решения и задач на движение;

владеть

- навыками вычисления экстремумов и построения графиков функций;
- навыками исследования функции по ее графику.

Ранее при изучении основных элементарных функций их графики строились без применения производной. Однако построение более сложных графиков требует и более тонкого аппарата, который предоставляет понятие производной. Применение производной позволяет более точно определять характер поведения функции и вычислять ее ключевые значения — находить промежутки возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости, максимумы, минимумы, асимптоты, точки перегиба. Исследованием поведения функций с помощью производных мы займемся в этой главе.

4.1. Определение интервалов монотонности функции

В гл. 3 мы упоминали, что знак производной определяет возрастание или убывание функции в точке. Однако для построения графика функции в целом полезно знать промежутки, на которых функция возрастает или убывает.

Напомним определения понятий возрастания и убывания функции на множестве A, содержащем не менее двух точек.

Определение 4.1. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*возрастающей*) на множестве A, если для любых двух точек $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$ из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) > f(x_1)$). Функция $f(x)$ называется *невозрастающей* (*убывающей*) на множестве A, если для любых двух точек $x_1 \in A$ и $x_2 \in A$ из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \leq f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Следующая теорема устанавливает достаточные условия возрастания и убывания функции на промежутке $(a; b)$, где a — число или $-\infty$, b — число ($b > a$) или $+\infty$.

Теорема 4.1. *Если функция $f(x)$ имеет неотрицательную (положительную) производную в каждой точке промежутка $(a; b)$, то она является неубывающей (возрастающей) на этом промежутке. Если функция $f(x)$ имеет неположительную (отрицательную) производную в каждой точке промежутка $(a; b)$, то она является невозрастающей (убывающей) на этом промежутке.*

Доказательство. Докажем теорему для случая неотрицательной производной. Для остальных случаев доказательство аналогично.

Предположим противное: для всех точек $x \in (a; b)$ производная $f'(x) \geq 0$, но существуют такие точки $x_1, x_2 \in (a; b)$, что $x_2 > x_1$, но $f(x_2) < f(x_1)$.

Тогда по теореме Лагранжа (см. теорему 3.4 из гл. 3) на интервале $(x_1; x_2)$ существует такая точка x_3, что $f'(x_3) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, т.е. $f'(x_2) < 0$, что противоречит условию. ■

Замечание 4.1. Если функция монотонна на интервале и непрерывна на каком-то из концов (или на обоих концах) этого интервала, то она будет также монотонной и на соответствующем полуинтервале (или отрезке).

Приведенная выше теорема позволяет находить промежутки возрастания и убывания дифференцируемой функции. Для этого нужно найти ее производную и решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ (или, не решая этих неравенств, определить промежутки, на которых производная положительна и на которых она отрицательна).

Пример 4.1

Найдем промежутки монотонности функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Решение. Вычислим производную заданной функции: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ и определим промежутки ее положительности и отрицательности.

Нанесем на числовую прямую корни получившегося квадратного трехчлена $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1)$ и отметим знаки его значений на каждом промежутке (рис. 4.1).

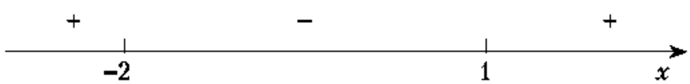


Рис. 4.1. **Знаки значений производной к примеру 4.1**

Таким образом, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-2; 1)$.

Это означает, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[-2; 1]$ (рис. 4.2).

Замечание 4.2. Было бы неверно утверждать, что функция возрастает на множестве $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Это очевидно хотя бы из рис. 4.2, поскольку, например, $f(2) = 4$ и $f(-3) = 9$, т.е. $f(2) < f(-3)$, в то время как $2 > -3$.

Пример 4.2

Найдем все значения параметра a, при которых функция $y = (6 + 4a)x^3 + (3a + 9)x^2 + (6a - 12)x - 18a - 5$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Вычислим производную функции: $y' = 3(6 + 4a)x^2 + 2(3a + 9)x + (6a - 12)$.

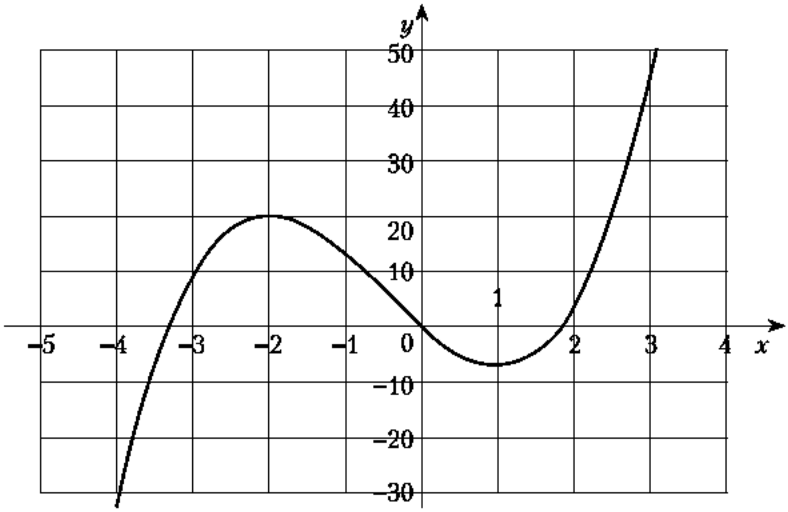


Рис. 4.2. **График функции к примеру 4.1**

Данная функция возрастает на всей числовой прямой тогда и только тогда, когда ее производная неотрицательна на всей числовой прямой, причем может обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Выясним, при каких условиях неравенство $3(6+4a)x^2+2(3a+9)x+(6a-12)\geq 0$ выполняется при всех значениях x. Разделим обе части последнего неравенства на 6:

$$(3+2a)x^2+(a+3)x+(a-2)\geq 0.$$

Очевидно, при $a=-\dfrac{3}{2}$ это требование не выполняется, т.е. $a=-\dfrac{3}{2}$ не является подходящим.

При $a\neq-\dfrac{3}{2}$ данное условие выполняется, только если дискриминант квадратного трехчлена неположителен, а ветви параболы направлены вверх:

$$\begin{cases}D\leq 0,\\ 3+2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)^2-4(3+2a)(a-2)\leq 0,\\ a>-1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a^2-10a-33\geq 0,\\ a>-1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow a\geq 3.$$

Ответ: $a\in[3;\infty)$.

Свойство монотонности непрерывной функции часто эффективно используется при решении уравнений и неравенств.

Рассмотрим, например, уравнение $\sqrt[7]{x+2}+2x^5+1=0$.

Нетрудно видеть, что в левой части уравнения находится монотонно возрастающая непрерывная функция. Следовательно, каждое значение из области значений эта функция принимает ровно один раз. В частности, нулевое значение функция принимает при $x=-1$. Заметим, что другие, стандартные способы решения иррациональных уравнений в данном примере будут неэффективны.

Пример 4.3

Решим неравенство $\sqrt[3]{5-x}>3-\dfrac{2}{\sqrt{x+4}+1}$.

Решение. Имеем

$$\sqrt[3]{5-x} > 3 - \frac{2}{\sqrt{x+4}+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{5-x} + \frac{2}{\sqrt{x+4}+1} - 3 > 0.$$

В левой части неравенства — монотонно убывающая на своей области определения $[-4; +\infty)$ функция, обращающаяся в нуль при $x = -3$ (определяем подбором). Следовательно, она принимает положительные значения при $x \in [-4; -3)$ и отрицательные — при $x \in (-3; +\infty)$.

Ответ: $[-4; -3)$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Верно ли, что если функция имеет положительную производную в каждой точке множества, то она возрастает на этом множестве?

2. Верно ли, что если функция является неубывающей на отрезке, то в каждой его точке производная неотрицательна?

3. Верно ли, что если функция дифференцируема в каждой точке отрезка и возрастает, то ее производная в каждой точке этого отрезка положительна?

4. Докажите или опровергните утверждение: произведение двух возрастающих функций, определенных на всей числовой оси, всегда является возрастающей функцией.

Упражнения

4.1. Что можно сказать о монотонности суперпозиции функций $f(g(x))$, если: а) функции f и g убывающие; б) функция f убывает, а функция g возрастает; в) функция f возрастает, а функция g убывает?

4.2. Найдите промежутки монотонности следующих функций: а) $y = x^4 - 2x^2$; б) $y = \ln\frac{x-2}{x+1}$; в) $y = \sin^2 x$; г) $y = xe^{-x}$; д) $y = x\ln x$.

4.3. Завершите доказательство теоремы 4.1.

4.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $6x^6 = 2x^9 + a$ имеет ровно два корня.

4.5. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = (a-1)x^3 + 6ax^2 + (6a-9)x - 7a + 5$ убывает на всей числовой прямой.

4.6*. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = 2a\sin^3 x - (6a + 3)\sin^2 x - 18\sin x + a - 2$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.7*. Решите уравнения: а) $x^5 + 2\sqrt[3]{3x-2} - 3 = 0$; б) $x^3 + \sqrt[4]{3+x} = \sqrt{2-x} - 13 - 2x$.

4.8*. Решите неравенства: а) $2x^3 + x + 20 + \sqrt[3]{3x-2} \geq 0$; б) $2x^5 + \sqrt[4]{5x+11} \geq \sqrt{2-x} + 5 - 2x$.

4.9*. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$; б) $y = \sqrt{3-x} + \frac{2}{\sqrt{x+5}}$; в) $y = 2\sqrt{x-1} + x - \sqrt[4]{17-x}$;

г) $y = 2 - x^3 - 2\sqrt[3]{x+1} - \arcsin x$.

4.2. Нахождение экстремумов функции

Экстремум функции — это обобщенное название для максимума и минимума функции. Термин «экстремум» происходит от латинского слова *extremum* — крайний. Понятие экстремума играет важную роль в задачах оптимизации, вытекающих из реальных проблем принятия решений в различных областях человеческой деятельности. Такие задачи возникают всякий раз, когда мы ставим своей целью добиться максимальных результатов или минимальных потерь. Непременным условием при этом является умение формализовать проблему, построить ее математическую модель.

Формализация состоит в построении множества допустимых решений и задании на нем так называемой целевой функции — критерия качества принимаемого решения. В задаче достижения максимальных результатов целевая функция должна строиться так, чтобы лучшим решениям соответствовали бóльшие значения, а худшим — меньшие. В задаче минимизации потерь — наоборот, лучшим решениям должны соответствовать меньшие значения целевой функции, а худшим — бóльшие.

Пример 4.4

Предприниматель располагает капиталом $k = 1$ млн руб. и хочет повыгоднее вложить его в дело, так чтобы через 10 лет получить максимальный доход. Для этого он решил сначала вложить свой капитал в торговую фирму, приносящую доход пропорционально вложенному капиталу и времени с момента вложения: $s = kt$, а затем — в производство, которое приносит доход пропорционально квадрату вложенного капитала и квадрату времени с момента вложения: $y = (st)^2$, где s — вложенные средства; t — время с момента вложения капитала (в годах). Через сколько лет предпринимателю следует забрать свой капитал из торговой фирмы и вложить его в производство?

Решение. Пусть t — время, через которое предприниматель забрал свой капитал из торговой фирмы и вложил его в производство. Здесь множеством допустимых решений является отрезок $t \in [0; 10]$. Доход предпринимателя в торговой фирме (т.е. размер его капитала в момент изъятия из торговой фирмы) составит $s = kt = 1 \cdot t = t$ (млн руб.). До истечения планируемого срока (10 лет) останется $10 - t$ лет. Таким образом, его окончательный доход от вложения капитала $s = t$ в производство составит

$$y = [s \cdot (10 - t)]^2 = [t \cdot (10 - t)]^2 = t^2(10 - t)^2 \text{ (млн руб.)}.$$

Мы получили целевую функцию $y = t^2(10 - t)^2$, значение которой нужно максимизировать путем выбора соответствующего значения переменной t. Математическая модель задачи построена, окончательное решение будет приведено ниже.

Как мы уже знаем, если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает, а если $f'(x_0) < 0$ — убывает. Остается выяснить, что происходит с функцией, если производная $f'(x_0) = 0$ или не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*, поскольку в них мгновенная скорость изменения функции равна нулю и ее график в этих точках как бы замирает, останавливается.

Определение 4.2. Точка x_0 из области определения функции, в которой производная функции равна нулю или не существует, называется *критической*.

Оказывается, что в критических точках функция может достигать *локального экстремума*. Слово «локальный» происходит от латинского слова *lokus* — место. Максимум и минимум называются локальными, потому что они являются, соответственно, наибольшим и наименьшим значениями функции в *достаточно малой окрестности* рассматриваемой точки, т.е. носят локальный (местный) характер, в отличие от *глобального экстремума* — наибольшего или наименьшего значения функции на всем множестве ее задания. Слово «локальный» часто опускают.

Дадим строгие определения.

Определение 4.3. Точка x_0 называется *внутренней точкой* области определения функции $f(x)$, если существует окрестность этой точки, целиком принадлежащая области определения функции.

Так, например, область определения функции $y=\sqrt{x}$ — множество $[0; +\infty)$. Как нетрудно видеть, все ее точки, за исключением точки $x = 0$, являются внутренними точками, поскольку для любой точки $x_0 > 0$ можно взять, например, окрестность $(0; 2x_0) \subseteq [0; +\infty)$, а для точки $x = 0$ окрестности, содержащейся в области определения функции, не существует.

Приводимые ниже определения локального максимума и минимума, а также необходимые и достаточные условия их существования будут относиться *только к внутренним точкам* области определения функции.

Определение 4.4. Точка x_0 называется точкой *локального максимума*, если существует такая δ-окрестность точки x_0: $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, что для всех точек $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Точка x_0 называется точкой *локального минимума*, если существует такая δ-окрестность точки x_0: $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, что для всех точек $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Рассмотрим график функции, изображенный на рис. 4.3.

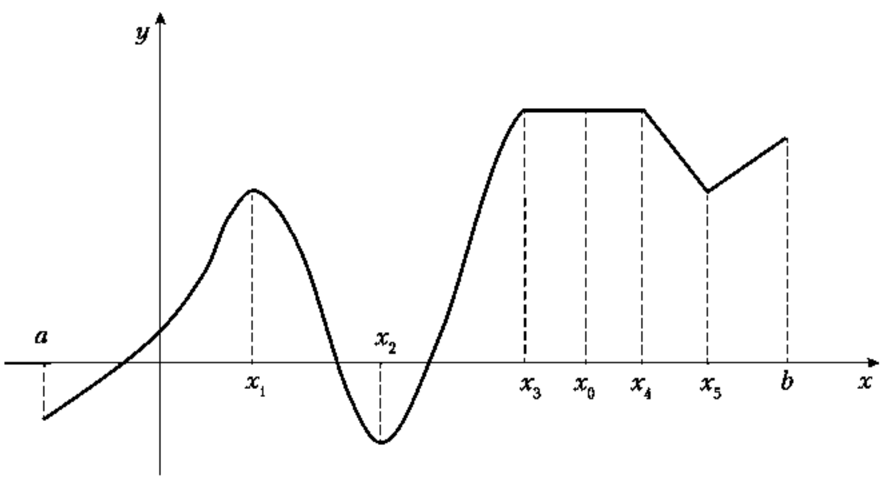


Рис. 4.3. **Локальные экстремумы функции**

Эта функция задана на отрезке $[a; b]$. В соответствии с определением 4.4 точками ее локального максимума являются точка x_1 и все точки отрезка $[x_3; x_4]$, а точками локального минимума — точки x_2, x_5 и, как ни странно, все точки интервала $(x_3; x_4)$. Действительно, какую бы точку x_0 между точками x_3 и x_4 мы ни взяли, всегда найдется ее окрестность, целиком содержащаяся в интервале $(x_3; x_4)$, а для точек этой окрестности будет выполнено равенство $f(x) = f(x_0)$, что не противоречит определению локального минимума функции.

Точки a и b на предмет локального экстремума мы не рассматриваем, поскольку они не являются внутренними для области определения функции. Однако часто в математической литературе такие точки называются точками *краевого* (или *граничного*) локального максимума или минимума, если значения функции в них являются наибольшими или, соответственно, наименьшими в некоторой односторонней окрестности: в нашем случае a — точка граничного локального минимума, а b — точка граничного локального максимума. Как очевидно из рисунка, эти точки не подпадают под определение критических: производная, правда односторонняя, в них существует и не равна нулю.

Если нас не устраивают случаи нестрогого максимума или минимума, когда в любой окрестности точки экстремума x_0 функция принимает такие же значения, как и в самой точке экстремума, то можно пользоваться понятием так называемого строгого экстремума.

Определение 4.5. Точка x_0 называется точкой *строгого локального максимума*, если существует такая δ-окрестность точки x_0: $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, что для всех точек $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точка x_0 называется точкой *строгого локального минимума*, если существует такая δ-окрестность точки x_0: $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, что для всех точек $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Очевидно, что строгий локальный экстремум является также и просто локальным экстремумом. Обратное, очевидно, не верно.

Покажем, что точки локального экстремума (максимума или минимума) являются критическими точками для рассматриваемой функции. Приводимая ниже теорема впервые доказана выдающимся французским математиком Пьером Ферма (1601—1665).

Теорема 4.2 (Ферма). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке ее производная равна нулю или не существует.*

$$x_0 \text{ — точка экстремума} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \text{ не существует} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 \text{ — критическая точка.}$$

Доказательство. Пусть x_0 — точка максимума функции $f(x)$. Если производная $f'(x_0)$ не существует, то тем самым заключение теоремы выполняется. Пусть производная $f'(x_0)$ существует.

Предположим, что либо $f'(x_0) > 0$, либо $f'(x_0) < 0$. Но если $f'(x_0) > 0$, то по теореме 3.3 в некоторой окрестности этой точки справа от нее значения функции строго больше $f(x_0)$, что противоречит определению локального максимума. Если же $f'(x_0) < 0$, то по той же теореме в некоторой окрестности этой точки значения функции слева от нее строго больше $f(x_0)$, что опять же противоречит определению локального максимума. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Для случая минимума доказательство аналогично. ■

Таким образом, если в точке экстремума существует производная, касательная к графику функции в этой точке горизонтальна (рис. 4.4).

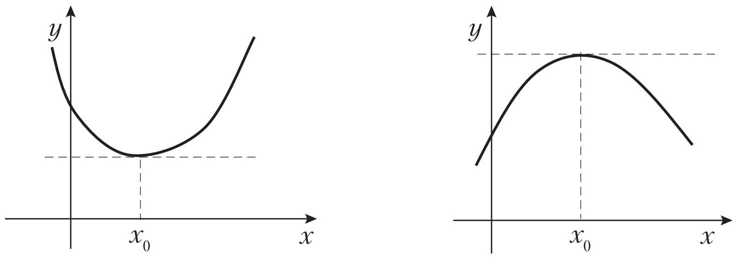
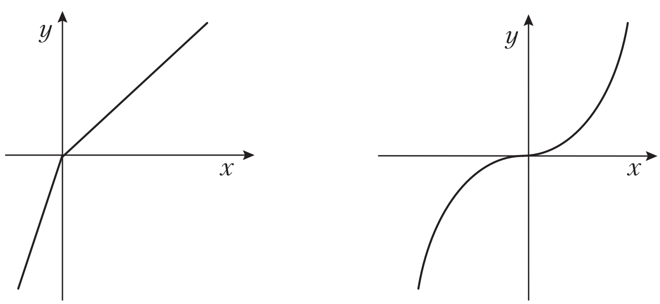


Рис. 4.4. **Касательная в точке экстремума**

Теорема Ферма устанавливает лишь *необходимое* условие экстремума: если оно не выполняется, то в рассматриваемой точке экстремума нет, или, другими словами: если в точке есть экстремум, то оно обязано выполняться.

Данное условие, однако, *достаточным* не является, т.е. существуют примеры функций, которые не имеют экстремума в критической точке (рис. 4.5). Кроме того, даже если экстремум и существует, из приведенной теоремы неясно, максимум это или минимум.



$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } x\le 0,\\ x & \text{при } x>0;\end{cases}$$

$f'(0)$ не существует.

а

$f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$

б

Рис. 4.5. **Примеры функций, не имеющих экстремума в критической точке**

Казалось бы, что проку от такого необходимого условия нет. Однако это далеко не так, поскольку необходимое условие отбраковывает все точки, в которых заведомо экстремума быть не может. А таких точек, как правило, подавляющее большинство. Точки, где выполняется необходимое условие, остаются для дальнейшего анализа: в них может быть либо максимум, либо минимум, либо отсутствие экстремума.

Этот дальнейший анализ осуществляется путем проверки выполнения достаточных условий, которые мы сейчас и рассмотрим. Очевидно, если функция слева от точки x_0 неубывающая, а справа — невозрастающая, то в самой точке x_0 будет максимум, и наоборот, если функция слева от точки x_0 невозрастающая, а справа — неубывающая, то в самой точке x_0 будет минимум (рис. 4.6).

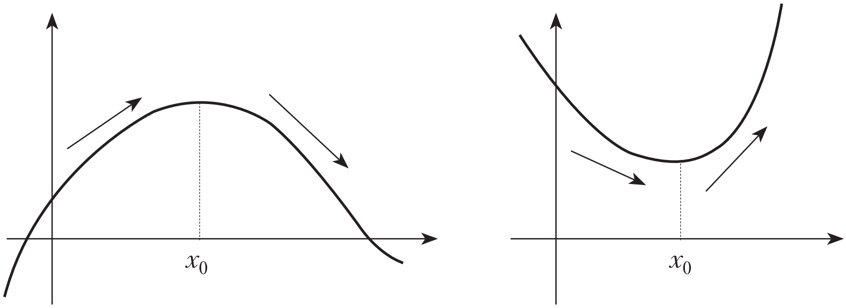


Рис. 4.6. **Достаточные условия экстремума**

Теорема 4.3. *Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a;\ b)$ и непрерывна в точке x_0. Если функция $f'(x) \geq 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) \leq 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 имеет место локальный максимум. Если $f'(x) \leq 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) \geq 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 имеет место локальный минимум.*

Доказательство. Докажем теорему для случая максимума. Для минимума доказательство аналогично.

Поскольку при $x \in (a;\ x_0)$ имеет место неравенство $f'(x) \geq 0$, то на этом интервале функция неубывающая (см. теорему 4.1). Пусть $x \in (a;\ x_0)$ — произвольная точка из этого интервала. Докажем, что $f(x) \leq f(x_0)$.

Поскольку на указанном интервале функция неубывающая, для любой точки $x' \in (x; x_0)$ будет $f(x) \leq f(x')$. Из непрерывности функции в точке x_0 следует, что $\lim\limits_{x' \to x_0} f(x') = f(x_0)$. И тогда на основании теоремы 1.3 (нестрогое неравенство сохраняется после перехода к пределу) получим $f(x) \leq f(x_0)$.

Для правой части интервала $(x_{0;}\ b)$ рассуждения аналогичны. ■

Замечание 4.3. В доказанной теореме не требуется существование производной в самой точке x_0.

Для строгого экстремума существует аналогичная теорема.

Теорема 4.4. *Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a;\ b)$ и непрерывна в точке x_0. Если $f'(x) > 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 имеет место строгий локальный максимум. Если $f'(x) < 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 имеет место строгий локальный минимум. Если на интервалах $(a;\ x_0)$ и $(x_0;\ b)$ производная имеет одинаковые знаки (либо на обоих интервалах положительна, либо на обоих интервалах отрицательна), то в точке x_0 экстремума нет.*

Доказательство. Докажем утверждение для максимума. Пусть $f'(x) > 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\ b)$.

Поскольку строгое неравенство — частный случай нестрогого, из теоремы 4.3 следует, что в точке x_0 имеет место максимум: $f(x) \leq f(x_0)$ для любого $x \in (a; b)$. Докажем, что он будет строгим. Предположим противное: пусть существует точка $x_1 \neq x_0$, для которой $f(x_1) = f(x_0)$.

Если $x_1 < x_0$, то возьмем произвольную точку $x_2 \in (x_1; x_0)$. Поскольку слева от точки x_0 $f'(x) > 0$, функция f на интервале $(a; x_0)$ возрастает, а значит, $f(x_2) > f(x_1)$ и, таким образом, $f(x_2) > f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x) \le f(x_0)$.

Если $x_1 > x_0$, то возьмем произвольную точку $x_2 \in (x_0; x_1)$. Поскольку справа от точки x_0 $f'(x) < 0$, функция f на интервале $(x_0; b)$ убывает, а значит, $f(x_2) > f(x_1)$ и, таким образом, $f(x_2) > f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x) \le f(x_0)$.

Пусть теперь производная слева и справа от точки x_0 имеет один и тот же знак, например положительна. Тогда по теореме 4.1 функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$, а значит, ни максимума, ни минимума в точке x_0 быть не может (докажите!). Аналогичное справедливо и в случае отрицательной производной. ■

Пример 4.5

Найдем точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Решение. Вычислим производную: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ и разложим ее на множители: $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$.

Найдем критические точки. Поскольку производная существует для любого действительного числа, все критические точки — это точки, в которых производная равна нулю. Итак, приравняем производную к нулю: $f'(x) = 6(x+2)(x-1) = 0$ и найдем стационарные точки функции $f(x)$: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Это и есть точки, «подозреваемые на экстремум». Определим, что на самом деле имеет место в этих точках: максимум, минимум или отсутствие экстремума.

Для этого нанесем на числовой прямой нули производной $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, отметим знаки ее значений на каждом промежутке (рис. 4.7) и воспользуемся теоремой 4.4.

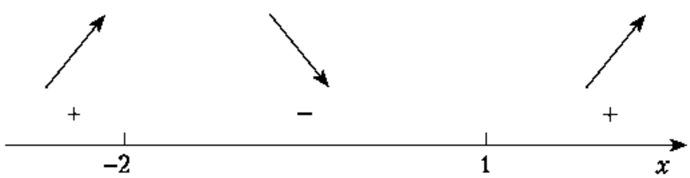


Рис. 4.7. **К примеру 4.5**

Из теоремы 4.4 следует, что в точке $x_1 = -2$ имеет место локальный максимум (строгий), а в точке $x_2 = 1$ — локальный минимум (тоже строгий). Подсчитаем экстремальные значения функции:

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20;$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = 2 + 3 - 12 = -7.$$

Пример 4.6

Исследуем на экстремум функцию $f(x) = |2x - 4| + 3$.

Решение. Раскрывая модуль, запишем эту функцию в виде

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } x \ge 2, \\ -2x + 7 & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Тогда производная будет иметь вид

$$f'(x)=\begin{cases}2 & \text{при } x>2,\\ -2 & \text{при } x<2,\\ \text{не существует при } x=2.\end{cases}$$

Таким образом, критическая точка одна — $x=2$. В ней производная не существует, однако функция в ней непрерывна, поскольку $\lim\limits_{x\to 2+0}(2x-1)=3$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}(-2x+7)=3$.

Воспользовавшись теоремой 4.4, получаем, что поскольку слева от точки $x = 2$ производная отрицательна, а справа — положительна, то в этой точке имеет место локальный минимум (строгий). Его значение равно $f(2) = 3$.

Пример 4.7

Исследуем на экстремум функцию $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем критические точки. Имеем

$$f'(x)=\sqrt[3]{x}+(x-4)\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. В точке $x_1 = 0$ производная не существует. При $x\in(-\infty;0)$ и при $x\in(0;1)$ производная отрицательна. Значит, на каждом из этих интервалов функция убывает. При $x\in(1;\infty)$ производная положительна, следовательно, функция возрастает. Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума функции, в ней производная меняет знак с «минуса» на «плюс». Значение функции в этой точке равно –3. В точке $x_1 = 0$ нет смены знака производной, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.

Пример 4.8

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–10; 8). На рис. 4.8 изображен график ее производной. Определим: а) абсциссы точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс; образует угол 45° с осью абсцисс; образует угол 135° с осью абсцисс; б) точки максимума функции; в) точки минимума функции; г) точки, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $4x + 2y - 9 = 0$ или совпадает с ней.

Решение. а) Касательная к графику функции параллельна оси абсцисс в тех точках, где производная равна нулю: {–6; –2; 2}. Касательная к графику функции образует угол 45° с осью абсцисс в тех точках, где производная равна единице $f'(x)=\mathrm{tg}\,45°=1$, т.е. {–5; –3; 3; 4; 6}. Касательная к графику функции образует угол 135° с осью абсцисс в тех точках, где производная равна –1: $f'(x)=\mathrm{tg}\,135°=-1$, т.е. $\left\{-7;-\frac{3}{2};1\right\}$.

б) В точках максимума функции производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. только в одной точке {–2}.

в) В точках минимума функции производная равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс», т.е. только в точках {–6; 2}.

г) Точки, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $4x + 2y - 9 = 0$ или совпадает с ней, имеют такой же угловой коэффициент касательной, как и данная прямая ($k = -2$), т.е. $\left\{-8;-1;\frac{1}{2}\right\}$.

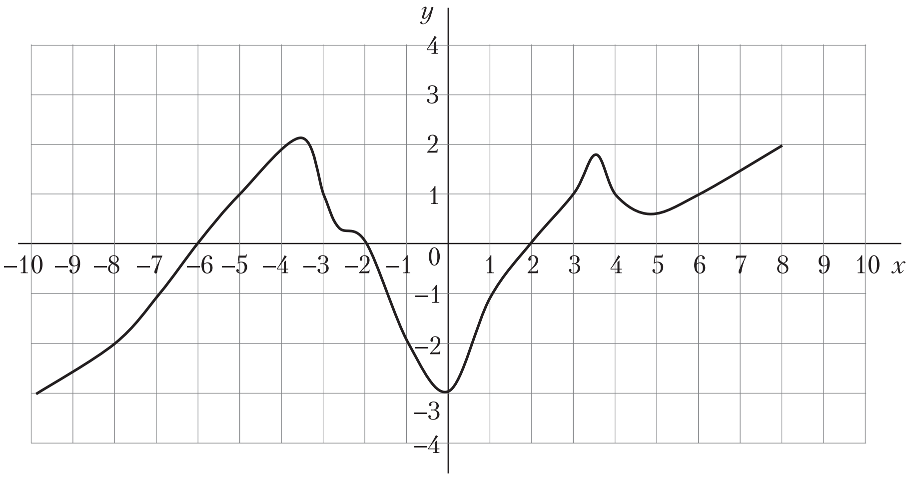


Рис. 4.8. **К примеру 4.8**

Для дважды дифференцируемой в рассматриваемой точке функции наличие и характер экстремума можно определять по знаку второй производной.

Теорема 4.5. *Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 первую производную, а в самой точке x_0 еще и вторую производную. Тогда для того чтобы в точке x_0 был локальный максимум (соответственно, минимум), необходимо, чтобы $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)\le 0$ (соответственно, $f''(x_0)\ge 0$) и достаточно (даже для строгого экстремума), чтобы $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$ (соответственно, $f''(x_0)>0$).*

Доказательство. Доказательство будем вести для максимума (для минимума доказательство аналогично).

Необходимость. Заметим, что необходимость пары условий означает необходимость каждого из них.

Необходимость условия $f'(x_0)=0$ следует из доказанной выше теоремы Ферма.

Докажем необходимость условия $f''(x_0)\le 0$. Предположим противное, т.е. что $f''(x_0)>0$. Но тогда по теореме 3.2 $f'(x)$ возрастает в точке x_0, в частности в некоторой ее окрестности справа $f'(x)>f'(x_0)=0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что в упомянутой окрестности справа от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а значит, максимума в точке x_0 быть не может, что противоречит условию.

Достаточность. Заметим, что ни одно из условий $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$ в отдельности не является достаточным, а только их совокупность.

Итак, пусть $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$. Тогда $f'(x)$ убывает в точке x_0, а значит, в некоторой окрестности слева от x_0 $f'(x)<f'(x_0)=0$, а справа $f'(x)>f'(x_0)=0$, откуда по теореме 4.4 следует, что в точке x_0 имеет место строгий локальный максимум. ■

Теорема 4.5 хороша тем, что она упрощает исследование функции на наличие экстремума. В ней сформулированы как необходимые, так и достаточные условия существования максимума и минимума функции в точке, причем, что очень существенно, необходимые и достаточные условия близки друг к другу. Действительно, они отличаются друг от друга только строгостью знаков неравенства. Неопределенность остается только в случае $f''(x_0)=0$. В этом случае в точке x_0 может существовать экстремум (максимум или минимум), в частности и строгий, а может не существовать (так называемая точка перегиба).

Следует подчеркнуть, однако, что теорема сформулирована в условиях наличия первой производной в окрестности рассматриваемой точки, причем в самой точке требуется наличие второй производной. В этом смысле теоремы 3.3 и 3.4 могут дать ответ в более широком множестве случаев.

Пример 4.9

Решим задачу из примера 4.5 с использованием теоремы 4.5.

Решение. После нахождения точек $x_1=-2$ и $x_2=1$, где первая производная обращается в нуль, вычислим вторую производную в этих точках:

$$f''(x)=12x+6,\ f''(-2)=-18<0 \Rightarrow \max,\ f''(1)=18>0 \Rightarrow \min.$$

Заметим, что для решения примера 4.6 воспользоваться теоремой 4.5 не удается, поскольку в точке экстремума производной (даже первой) не существует.

Пример 4.10

Исследуем на наличие экстремумов функцию $y=x^4$.

Решение. Применяя теорему 4.5, получим $y'=4x^3=0 \Rightarrow x=0, y''=12x^2, y''(0)=0$. Таким образом, в данном случае теорема 4.5 ответа не дает.

Применяя теорему 4.4, будем иметь при $x<0$ $y'<0$, а при $x>0$ $y'>0$, т.е. в точке $x=0$ имеет место минимум.

Пример 4.11

Исследуем на наличие экстремумов функцию $y=x^3$.

Решение. Применяя теорему 4.5, получим $y'=3x^2=0 \Rightarrow x=0,\ y''=x,\ y''(0)=0$. Таким образом, в данном случае теорема 4.5 ответа не дает.

Применяя теорему 4.4, будем иметь при $x<0$ $y'>0$, а при $x>0$ $y'>0$, т.е. в точке $x=0$ экстремума нет.

В практических задачах исследователя чаще всего интересует не локальный экстремум (максимум или минимум), а наибольшее или наименьшее значение функции (так называемые *глобальные экстремумы*: *глобальный максимум* или *глобальный минимум*). Заметим, что, как уже упоминалось ранее, наибольшее или наименьшее значение далеко не всегда существует. Однако для непрерывной функции, заданной на отрезке, как следует из теоремы Вейерштрасса (см. теорему 2.6), такие значения существуют всегда. Как их находить? Оказывается, для непрерывной функции, заданной на отрезке, наибольшее и наименьшее значения достигаются либо в критических точках, либо на концах отрезка.

Таким образом, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение непрерывной функции, заданной на отрезке, достаточно найти все ее критические точки на этом отрезке, подсчитать значения в них и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее или наименьшее (какое требуется). Если критических точек конечное число, это всегда можно сделать. При этом даже нет необходимости уточнять, являются ли эти точки точками максимума, минимума или вообще в них нет экстремума — лишние точки все равно отсеются при сравнении значений функции в них.

Пример 4.12

Продолжим решение примера 4.4. Там мы получили функцию $y = t^2(10-t)^2$, наибольшее значение которой на отрезке $[0; 10]$ нужно найти.

Решение. Поскольку данная функция является элементарной, она непрерывна на всей области своего определения, в частности при $t \in [0; 10]$. А значит, глобальный максимум у нее существует. Найдем критические точки этой функции:

$$y' = 2t(10-t)^2 + t^2 \cdot 2(10-t) \cdot (-1) = 2t(10-t)(10-t-t) = 2t(10-t)(10-2t).$$

Производная, очевидно, определена всюду на отрезке $[0; 10]$ и обращается в нуль в точках $t_1 = 0$, $t_2 = 10$, $t_3 = 5$. Первые две точки являются концами отрезка, поэтому критическими, по определению, не считаются. Таким образом, критическая точка только одна: $t_3 = 5$.

Подсчитаем значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$y(5) = 5^2(10-5)^2 = 25 \cdot 25 = 625, \quad y(0) = 0, \quad y(10) = 0.$$

Сравнивая полученные значения, видим, что наибольшего значения целевая функция $y = t^2(10-t)^2$ достигает в точке $t = 5$. Таким образом, предпринимателю следует переместить свой капитал из торговли в промышленность через 5 лет. При этом через 10 лет после первоначального вложения капитала он получит доход в размере 625 млн руб.

Оценим целесообразность принятого предпринимателем предварительного решения о двухэтапном использовании капитала. Если бы предприниматель не перемещал свой капитал, оставив его до конца 10-летнего срока в торговле, он получил бы конечный доход, равный $s = k \cdot 10 = 10$ млн руб. А если бы сразу поместил свой капитал в промышленность, то его конечный доход составил бы $(k \cdot 10)^2 = (10)^2 = 100$ млн руб. Таким образом, предприниматель выбрал правильную стратегию.

Пример 4.13

Найдите наименьшее расстояние между точками графика функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ и прямой l: $y = 2x - 5$.

Решение. 1-й способ. Как известно, расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ выражается формулой

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Преобразуем уравнение прямой к виду, требуемому для применения указанной формулы. Для этого перенесем все члены уравнения прямой в одну сторону: $2x - y - 5 = 0$. Здесь $a = 2$, $b = -1$, $c = -5$.

Произвольная точка графика функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ имеет координаты $(x, 3x^2 + 2x - 1)$. Таким образом, требуется минимизировать выражение

$$d(x)=\frac{|2x-(3x^2+2x-1)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-3x^2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{3x^2+4}{\sqrt{5}}.$$

Очевидно, минимум достигается при $x=0$: $d(0)=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2-й способ. Можно догадаться, что минимальное расстояние между графиком дифференцируемой функции и прямой достигается в точке графика функции, в которой касательная параллельна данной прямой (рис. 4.9).

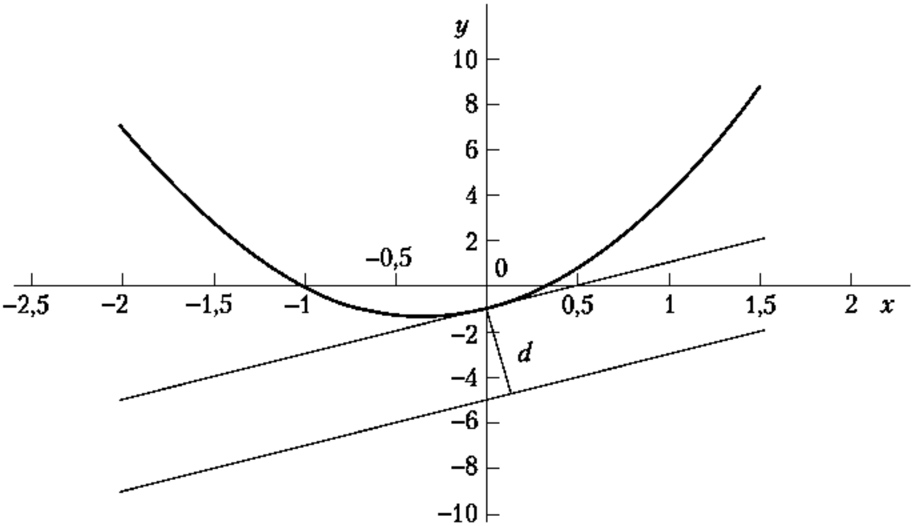


Рис. 4.9. **К примеру 4.13**

Таким образом, нужно найти точку, в которой касательная к графику имеет тот же угловой коэффициент, как и у прямой, т.е. $k=2$.

Находим: $f'(x)=6x+2=2 \Rightarrow x=0,\ y=-1$.

По формуле расстояния от точки до прямой вычисляем искомое расстояние:

$$d(x)=\frac{|2\cdot 0-(-1)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что такое экстремум, локальный экстремум, глобальный экстремум?
2. Может ли локальный экстремум быть (не быть) глобальным?
3. Может ли глобальный экстремум быть (не быть) локальным?
4. Может ли локальный (глобальный) минимум быть локальным (глобальным) максимумом?
5. Что такое строгие максимум и минимум, каково их соотношение с (просто) максимумом и минимумом?
6. Что такое стационарная точка, критическая точка, какое между ними соотношение?
7. Что такое внутренняя точка области определения функции? Верно ли утверждение теоремы 4.2 для точек, не являющимися внутренними?

8. Какие необходимые условия и достаточные условия наличия экстремума в точке вы знаете? Сравните их между собой по области применимости и результативности. Остаются ли случаи, не охваченные теоремами?

9. Почему в теоремах 4.3 и 4.4 требуется непрерывность функции в исследуемой точке x_0?

10. Докажите, что если функция непрерывна в точке $x = a$ и возрастает на интервале $(a; b)$, то для любого $x \in (a; b)$ будет выполняться неравенство $f(x) > f(a)$.

11. Докажите, что наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции, заданной на отрезке, могут достигаться либо в критических точках, либо на концах этого отрезка.

12. Докажите теоремы 4.2—4.5 для минимума.

13. Какова схема отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке? Годится ли эта схема для интервала?

Упражнения

4.10. Найдите точки локальных экстремумов и экстремальные значения, а также постройте графики следующих функций:

а) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$; б) $y = (x+1)^{0,3}(3-x)^{0,6}$; в) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; г) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$;

д) $y = e^{-x^2}$; е) $y = |2x-4| + |x+1|$; ж) $y = 2x^2 + 3x + 0{,}5^{-\log_2(2-x-x^2)}$;

з) $y = 3x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 3^{-\log_{0,(3)}(2-x-x^2)}$; и) $y = 75 \cdot 5^x - 125^x$.

4.11. Найдите наименьшее положительное значение параметра a, при котором уравнение $x^2 + \dfrac{54}{x} = a$ имеет хотя бы один положительный корень.

4.12. Найдите наименьшее значение функции $y = \mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x$.

4.13. Найдите точки максимума функции $f(x) = 4{,}5x^2 + 4x^3 - \dfrac{15 - 15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^4$.

4.14. Найдите наименьшее расстояние между точками графика функции $y = f(x)$ и прямой l: а) $y = 2x^2 - x$, l: $y = 3x - 10$; б) $y = 2x\sqrt{x}$, l: $y = 3x - 1$; в) $y = 3x - x^2$, l: $x + y = 10$.

4.15. На графике функции $y = 4 - x^2$, $x \in [-2; 0]$, найдите такие точки M_1 и M_2, чтобы площадь треугольника AM_1B была наименьшая, а площадь треугольника AM_2B — наибольшая, где $A\ (-1; -5)$, $B(2; 1)$.

4.16. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые три года вклад уменьшается на $2x\%$ в год, а последующие четыре года увеличивается на $5x\%$ в год, причем величину $x \in [0; 50]$ вы можете выбрать сами. При каком значении x через семь лет прирост вклада будет наибольщим?

4.17. Какова наибольшая площадь прямоугольника с периметром 20 см?

4.18. Каков наименьший периметр прямоугольника, площадь которого равна 25 см^2?

4.19. Как из прямоугольного листа картона размером 80×50 см изготовить коробку в форме параллелепипеда без верха максимальной емкости? Нарисуйте выкройку с размерами и укажите максимальный объем коробки.

4.20. Расход топлива за один час движения парохода со скоростью v км/ч равен $250 + v^3$ л. Найдите время, которое потребуется пароходу для преодоления расстояния 145 км с наименьшими затратами топлива.

4.21. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $72 + 18v + \dfrac{v^2}{2}$ ден. ед. С какой скоростью должен плыть пароход, чтобы стоимость поездки протяженностью 320 км была наименьшей?

4.22. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, образованного отрезками координатных осей и отрезком касательной к графику функции $y=\frac{3}{x}$.

4.23. Найдите радиус прямого кругового цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в прямой круговой конус с радиусом основания 72.

4.24. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на неравные отрезки a и b. Найдите наибольшую возможную длину высоты, опущенной из той же вершины.

4.25. Туристу необходимо попасть из пункта A, находящегося на одном берегу сильно вытянутого в длину озера, в пункт B, находящийся на другом берегу этого озера, в кратчайший срок. Расстояние между пунктами A и B по прямой равно 500 м, ширина озера 300 м (рис. 4.10). По озеру турист может передвигаться на лодке со скоростью 2 км/ч, а по берегу — со скоростью 6 км/ч. Турист в пункте A нанял лодку с перевозчиком. Найдите минимальное время, за которое турист может пройти весь маршрут, и соответствующую траекторию движения.

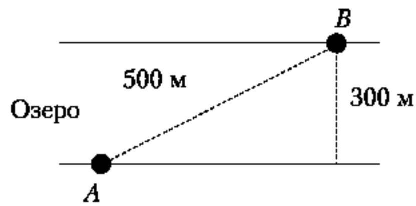


Рис. 4.10. **К задаче 4.25**

4.26. Из артиллерийского орудия, находящегося на поверхности земли, выпущен снаряд со скоростью v под углом α к горизонту. Координаты его движения в зависимости от времени описываются функциями $x(t)=vt\cos\alpha$, $y(t)=vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$ $(g\approx 10\text{ м/с}^2)$. Изобразите траекторию снаряда. При каком значении угла α дальность полета будет максимальной? Найдите максимальную дальность полета. Какова при этом будет максимальная высота полета?

4.27. Фирма-монополист планирует объем производства товара некоторого вида на текущий период времени. Себестоимость единицы товара (затраты на производство) оценивается фирмой в 5 усл. ед., а цена p товара в зависимости от количества q произведенного и поступившего в продажу товара — как $p(q)=\frac{100}{\sqrt{q}}$. Найдите оптимальный объем производства товара q, максимизирующий прибыль фирмы в предположении, что весь товар будет распродан.

4.28. Расстояние между пунктами A и B по шоссе, проходящему вдоль песчаных мест, равно 68 км. Заводу, расположенному в пункте A, требуется 25 т песка в день, а заводу в пункте B — 9 т. Между пунктами A и B находится карьер, из которого транспортная компания возит песок на заводы. Перевозка p т песка на расстояние l км стоит $\sqrt{pl}$ усл. ед. На каком расстоянии от пункта A располагается песчаный карьер, если при указанных условиях доход транспортной компании от перевозки песка максимальный?

4.29. Доход нефтяной компании (в усл. ед.) пропорционален произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится в 3 усл. ед., одного добытчика — в 4 усл. ед. Найдите отношение числа геологов к числу добытчиков, если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем.

4.30. Лодка переправляется на другой берег реки, скорость течения которой 5 км/ч. Под каким углом к берегу реки должна держать курс лодка, чтобы ее отклонение от точки старта вдоль реки было минимальным, если собственная скорость лодки равна 3 км/ч?

4.31. Найдите наименьшее расстояние между точками графика функции $y = 5 - x^2 - 3x$ и прямой $l: 5x + y - 10 = 0$.

4.3. Нахождение асимптот функции

В школьном курсе математики вы познакомились с горизонтальными и вертикальными асимптотами при изучении гипербол. Однако у некоторых функций существуют еще и *наклонные асимптоты*. С их помощью можно точнее построить график функции, оценить характер ее поведения при стремлении переменной x к бесконечности. Поведение функции при стремлении переменных x или y к бесконечности часто называют *асимптотическим поведением функции*, или просто *асимптотикой функции*.

Поскольку мы расширяем класс асимптот, необходимо дать общее определение, охватывающее все виды асимптот.

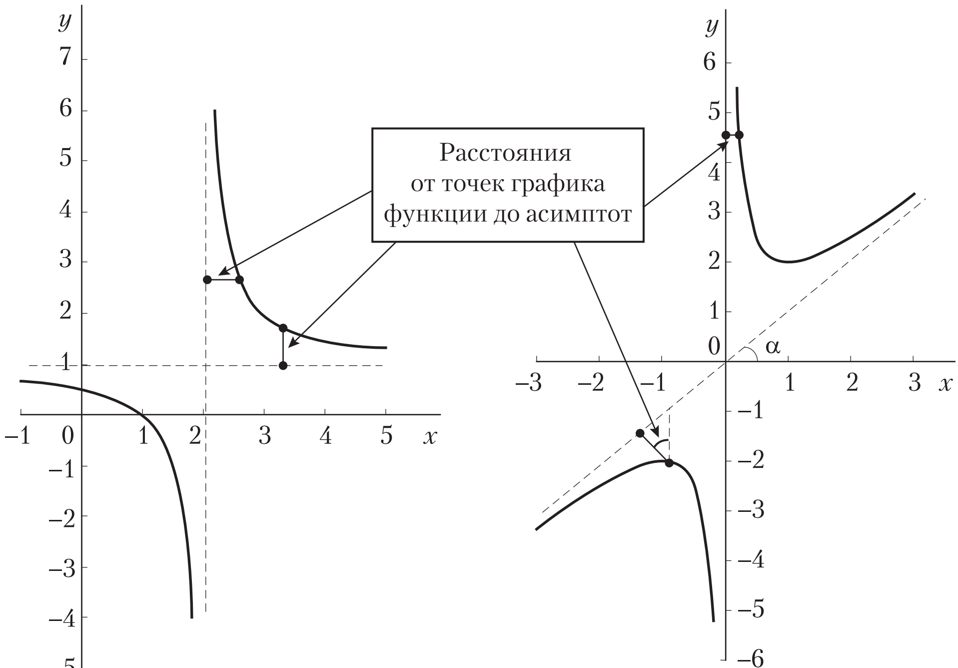
Определение 4.6. *Асимптотой* функции $y = f(x)$ называется прямая линия, расстояние от которой до точек графика функции стремится к нулю при стремлении переменной x или y к $+\infty$ или к $-\infty$.

Примеры горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот изображены на рис. 4.11. Известно, что расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру к этой прямой (в данном случае к асимптоте). На рисунке соответствующие отрезки показаны жирными линиями. Для наклонной асимптоты расстояние можно измерять также по вертикали — длина соответствующего отрезка (на рис. 4.11, *б* этот отрезок показан пунктирной линией) отличается от длины перпендикуляра постоянным множителем, не зависящим от точки кривой графика функции. Действительно, $d_в = \dfrac{d_п}{|\cos\alpha|}$, где $d_в$ — расстояние по вертикали; $d_п$ — расстояние по перпендикуляру к асимптоте; α — угол наклона асимптоты к оси Ox. Поэтому в пределе либо оба расстояния стремятся к нулю, либо оба не стремятся к нулю. Измерение по вертикали удобнее тем, что его проще выразить аналитически: $d_в = |f(x) - g(x)|$, где $f(x)$ — рассматриваемая функция; $g(x)$ — линейная функция, описывающая наклонную асимптоту.

Итак, пусть горизонтальная или наклонная асимптота описывается функцией $y = g(x) = kx + b$ (для горизонтальной асимптоты $k = 0$). Тогда исходя из определения асимптоты и приведенных выше рассуждений получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - g(x)| = 0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - g(x)| = 0$[1]. Возможны случаи, когда существуют оба предела (общая асимптота), но возможны также случаи, когда существует только один из них (правая или левая асимптота) или эти пределы различны.

Как найти горизонтальную или наклонную асимптоту?

[1] Модуль можно не писать, поскольку предел равен нулю.



а

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

Горизонтальная асимптота: $y = 1$
Вертикальная асимптота: $x = 2$

б

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Горизонтальная асимптота: $y = 1$
Наклонная асимптота: $y = x$

Рис. 4.11. **Примеры асимптот**

Найти горизонтальную асимптоту довольно просто — достаточно вычислить предел функции $y = f(x)$ в $+\infty$ и в $-\infty$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то уравнение асимптоты имеет вид $y = b$.

Нахождение наклонной асимптоты (при $k \neq 0$) несколько сложнее. Ее следует искать, только если конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ не существует. Для нахождения уравнения асимптоты достаточно найти два параметра: угловой коэффициент k и свободный член b.

Угловой коэффициент ищется как предел (если он существует) отношения $\dfrac{f(x)}{x}$ при x, стремящемся к бесконечности: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Для сокращения записи мы здесь знак бесконечности не ставим, подразумевая любой из них — какой потребуется.

Докажем последнюю формулу. Действительно, если функция имеет асимптоту $y = kx + b$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$, откуда получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0, \text{ или } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0, \text{ или } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k.$$

Для нахождения свободного члена b нужно вычислить предел $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Для нахождения вертикальных асимптот нужно найти точки a, в которых существует бесконечный предел модуля функции $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = +\infty$ или же односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a-0}|f(x)| = +\infty$ либо $\lim\limits_{x\to a+0}|f(x)| = +\infty$.

Пример 4.14

Найдем асимптоты функции $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Решение. Поскольку справедливы равенства $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x-2} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x-2} = 1$, имеется общая (одновременно и правая, и левая) горизонтальная асимптота $y = 1$. Значит, наклонную асимптоту искать бессмысленно.

Так как $\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| = +\infty$, имеется вертикальная асимптота: $x = 2$ (см. рис. 4.11, *а*).

Пример 4.15

Найдем асимптоты функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, то горизонтальных асимптот у этой функции нет.

Поиск наклонных асимптот приводит к равенствам

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, имеется общая наклонная асимптота $y = x$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = +\infty$, имеется вертикальная асимптота: $x = 0$ (см. рис. 4.11, *б*).

Пример 4.16

Найдем асимптоты функции $y = x^3 + \dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Вертикальная асимптота, очевидно, одна: $x = 0$, так как не существует других точек, кроме точки $x = 0$, в окрестности которых значение функции стремится к бесконечности.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Для нахождения наклонных асимптот имеем равенства

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3 + \frac{1}{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3 + \frac{1}{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

Таким образом, и наклонных асимптот тоже нет.

Для уточнения вида графика полезно определить, с какой стороны приближается график функции к горизонтальной или наклонной асимптоте: сверху, снизу или с обеих сторон (нанизывается на асимптоту). Для этой цели нужно рассмотреть разность $r(x) = f(x) - kx - b$. Если эта разность при достаточно больших по модулю x положительна, то график лежит выше асимптоты, если отрицательна — то ниже, если переменного знака — то с обеих сторон.

Пример 4.17

Найдем наклонные асимптоты функции $y = \dfrac{x^3 - 3|x| - 1}{x|x|}$ и определим, с какой стороны к ним приближается ее график.

Решение. Для параметров асимптот будем иметь:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^3+3x-1}{-x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+3x-1}{-x^2} - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0;$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^3-3x-1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Таким образом, имеем две наклонные асимптоты: $y = -x$ (при $x \to -\infty$) и $y = x$ (при $x \to +\infty$).

Посмотрим, с какой стороны приближается график функции к своим асимптотам. Для этого возьмем разность $r(x) = f(x) - kx - b$ и оценим ее знак.

Для левой асимптоты (при $x \to -\infty$) получим

$$r(x) = f(x) - k_1x - b_1 = \frac{x^3+3x-1}{-x^2} + x = \frac{-3x+1}{x^2} > 0,$$

так как $x < 0$. Таким образом, график функции лежит выше асимптоты.

Для правой асимптоты (при $x \to +\infty$) получим

$$r(x) = f(x) - k_2x - b_2 = \frac{x^3-3x-1}{x^2} - x = \frac{-3x-1}{x^2} < 0,$$

так как $x > 0$. Таким образом, график функции лежит ниже асимптоты (рис. 4.12).

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что такое асимптота? Какие виды асимптот существуют?
2. Укажите способы нахождения асимптот каждого вида.
3. Верно ли, что если дифференцируемая функция имеет горизонтальную асимптоту, то угловой коэффициент касательной в точке x при $x \to +\infty$ стремится к нулю?
4. Приведите пример функции, когда ее график стремится к наклонной асимптоте с обеих сторон.
5. Может ли существовать значение функции в точке x_0, если она имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$?

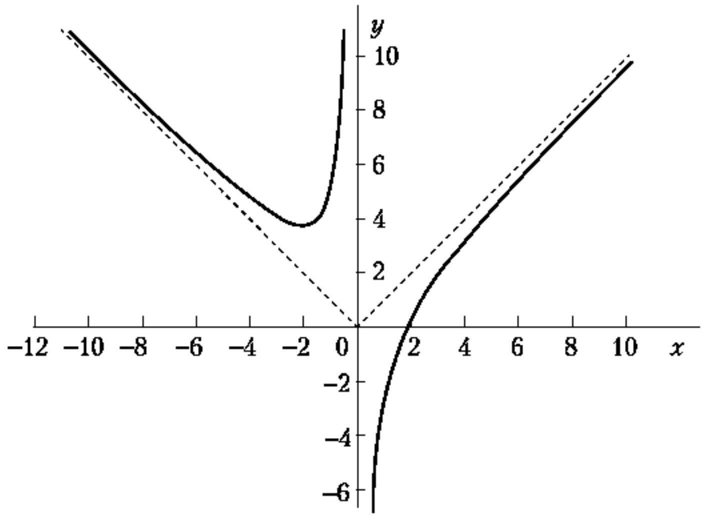


Рис. 4.12. **К примеру 4.17**

6. Верно ли, что если $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = +\infty$, то функция имеет вертикальную асимптоту $x = a$?

7. Приведите пример элементарной функции $y = f(x)$, которая имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

8. Верно ли, что если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ — число, то функция имеет асимптоту с угловым коэффициентом k?

9. Может ли четная функция иметь разные левую и правую горизонтальные асимптоты? А общую наклонную асимптоту?

10. Может ли нечетная функция иметь разные левую и правую горизонтальные асимптоты? А общую наклонную асимптоту, разные наклонные асимптоты?

11. Может ли периодическая функция иметь горизонтальные, наклонные, вертикальные асимптоты?

Упражнения

4.32. Найдите асимптоты следующих функций; для горизонтальных и наклонных определите, с какой стороны к ним приближается график функции; для вертикальных определите пределы функции слева и справа:

а) $y = \dfrac{2x^2-3}{x}$; б) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in [1; +\infty)$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; г) $y = 2x + 3\sin\dfrac{1}{x}$.

4.33. В растворе X содержится 10% вещества A и 30% вещества B. В растворе Y содержится 20% вещества A и 30% вещества B. В растворе Z содержится 40% вещества A и 20% вещества B. В результате смешивания получили раствор T, содержащий 30% вещества A. Каково наибольшее возможное процентное содержание вещества B в растворе T?

4.34. Найдите наименьшее x_0, такое что для всех $x \geq x_0$ функцию $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$ можно заменить ее асимптотой с погрешностью не более чем 0,01.

4.35. Прогнозируется, что население проектируемого нового города будет расти по закону $y = 500(1-e^{-t})$ тыс. человек, где t — время (годы). При проектировании трубопровода для снабжения населения водой необходимо определить его пропускную способность, с тем чтобы все жители будущего города в перспективе были снабжены достаточным количеством воды. Считая среднее потребление воды в день одним человеком равным 80 л, определите необходимую пропускную способность трубопровода.

4.36. Закон движения ракеты должен описываться уравнением $x(t)=5t^2+3t+2-2e^{-t}$, где t — время, с; x — смещение, м. Считая, что скорость подачи топлива для работы двигателя численно равна ускорению ракеты с коэффициентом пропорциональности k = 3 л/с, определите, на какую максимальную скорость должна быть рассчитана система подачи топлива.

4.4. Определение промежутков выпуклости и вогнутости функции

Для уточнения вида графика функции полезно бывает определить, на каких участках график функции выпуклый (вниз), а на каких — вогнутый (выпуклый вверх). Это можно сделать с помощью второй производной.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 4.6. *Если на промежутке $(a; b)$, где a — число или $-\infty$, b — число или $+\infty$, $f''(x)>0$, то функция $f(x)$ на этом промежутке выпукла. Если на указанном промежутке $f''(x)<0$, то функция на этом промежутке вогнута.*

Определение 4.7. Абсциссы точек, в которых выпуклость сменяется вогнутостью или наоборот, называются *точками перегиба.*

Из теоремы 4.6 следует, что если вторая производная в точках перегиба существует, то она равна нулю.

Касательная, проведенная в точке перегиба, разделяет график функции в ее окрестности на две части. Если касательная не вертикальная, то выпуклая часть графика находится сверху от касательной, а вогнутая — снизу.

Пример 4.18

Найдем области выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $y=x^3-3x^2-2x+1$.

Решение. Вычислим вторую производную: $y'=3x^2-6x-2$, $y''=6x-6$. На числовой прямой отметим знаки второй производной (рис. 4.13).

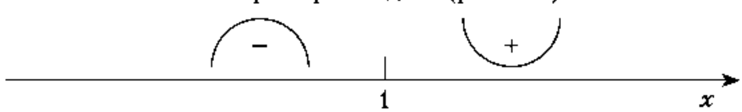


Рис. 4.13. **Знаки второй производной к примеру 4.18**

Таким образом, при $x<1$ функция вогнута, а при $x>1$ — выпукла, $x=1$ — точка перегиба (рис. 4.14).

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Дайте определения выпуклости и вогнутости функции.

2. Как расположены графики выпуклой и вогнутой функции по отношению к своим касательным?

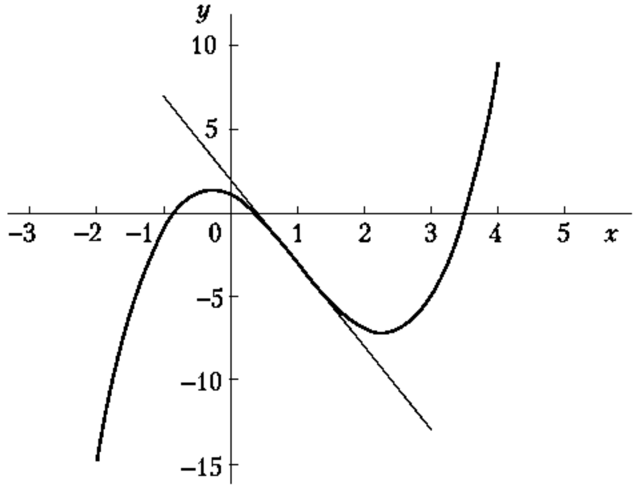


Рис. 4.14. **График функции к примеру 4.18**

3. Что такое точка перегиба?
4. Верно ли, что в точке перегиба вторая производная всегда равна нулю?
5. Сформулируйте достаточные условия выпуклости и вогнутости функции на интервале.

Упражнения

4.37. Найдите области выпуклости и вогнутости и точки перегиба следующих функций:
а) $y = x^4 - 6x^2 + 2x - 3$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = e^{-x^2}$; г) $y = x + \sin x$; д) $y = x^2 + 2\cos x$;
е) $y = x \ln x$; ж) $y = x^2 \ln x$.

4.38. Опираясь на теорему 4.6, докажите, что если в точке x_0 вторая производная непрерывна и положительна, то в некоторой ее окрестности функция выпукла.

4.5. Схема исследования функции

График функции можно в принципе строить по точкам, вычисляя значения функции в серии различных точек. Вручную это сделать очень сложно ввиду большого объема вычислений, а с помощью компьютера так, собственно говоря, графики и строятся. Однако и в случае использования компьютера необходимо задать диапазон изменения аргумента, поскольку даже компьютер не может построить график функции от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, необходимо задать частоту точек или сами точки, в которых должны вычисляться значения функции. В самом деле, ведь компьютер не может вычислить значения функции во всех точках промежутка, поскольку их бесконечное множество. При этом можно упустить некоторые характерные особенности функции, которые проявляются либо за пределами заданного промежутка, либо между его точками, в которых вычисляется функция, если частота этих точек недостаточна. Поэтому прежде чем вычислять значения функции в конкретных точках, необходимо выявить особенности ее поведения. Ниже предлагается стандартная схема исследования функции и построения эскиза ее графика.

Схема исследования функции $y = f(x)$

1. Находятся и отмечаются на оси абсцисс (или отдельно на числовой прямой) области определения и непрерывности функции, а также точки разрыва.

2. Находится и отмечается точка пересечения графика функции с осью ординат. Это полезно сделать для привязки функции к осям координат. В практических приложениях обычно точку $x = 0$ берут за начало отсчета и рассматривают поведение исследуемой функции на некотором протяжении справа или с обеих сторон от нуля (хотя теоретически точка $x = 0$ ничем не лучше и не хуже других точек на оси Ox).

3. Определяются общие особенности функции: четность, нечетность, периодичность или их отсутствие. Если функция четна или нечетна, график достаточно построить только для $x \geq 0$ и затем симметрично отразить его относительно оси ординат или начала координат соответственно. Если функция периодическая, то график строится в пределах одного периода с последующим продолжением по периодичности.

4. Определяются и отмечаются на оси абсцисс (или отдельно на числовой прямой) нули и промежутки знакопостоянства функции (нули — точкой, участки положительности — знаком «плюс», отрицательности — знаком «минус»).

5. Находятся и изображаются асимптоты. Определяется характер стремления к ним функции (сверху, снизу, с обеих сторон — для горизонтальных и наклонных). Для вертикальных асимптот $x = a$ вычисляются пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. На плоскости Oxy приблизительно намечаются части графика функции, достаточно близкие к асимптотам. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ бесконечны, рисуются соответствующие части графика с учетом знака бесконечности.

6. Вычисляется производная функции, находятся критические точки и промежутки монотонности функции (промежутки возрастания и убывания функции отмечаются около оси абсцисс или отдельно на числовой прямой соответствующими стрелками). Находятся значения функции $f(x)$ в критических точках и соответствующие точки наносятся на плоскость Oxy.

7. Вычисляется вторая производная, находятся ее нули и промежутки знакопостоянства. В нулях второй производной вычисляются значения функции $f(x)$ и соответствующие точки наносятся на плоскость Oxy. Промежутки, в которых $f''(x) > 0$, помечаются около оси абсцисс (или отдельно на числовой прямой) выпуклой вниз дугой, а в которых $f''(x) < 0$ — вогнутой дугой.

8. С учетом полученной информации строится эскиз графика функции. Если первоначальные наброски частей графика не вполне стыкуются с другими частями, график следует перерисовать заново, уже более точно.

Замечание 4.4. Следует заметить, что выше приведена полная схема исследования функции. Однако в зависимости от вида функции для построения ее графика могут быть существенными не все, а только некоторые из приведенных пунктов схемы. Поэтому рекомендуется одновременно с вычислениями по схеме рисовать участки графика функции, примерный вид которых уже ясен. Это может сократить объем работы по исследованию функции за счет невыполнения пунктов схемы, которые не привнесут полезной информации для построения графика функции. Простейшим примером, подтверждающим данный совет, является построение графика линейной функции, для чего достаточно вычислить ее значение в двух точках и соединить их прямой линией.

Пример 4.19

Построим график функции $y=|x|+\dfrac{1}{x}$.

Решение. 1. Область определения функции $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Эта функция непрерывна всюду на своей области определения, поскольку является элементарной, а область определения не содержит изолированных точек. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв, так как эта точка не принадлежит к области ее определения, но является предельной для нее. Поскольку к области определения и непрерывности функции принадлежат все точки, кроме точки $x = 0$, специально выделять указанную область не будем, а, наоборот, выделим кружочком точку разрыва функции.

Замечание 4.5. Функция $y=|x|$ элементарная, хотя в ее выражении и присутствует операция взятия модуля, не предусмотренная в списке операций, с помощью которых получаются элементарные функции из основных элементарных. Но, как нетрудно заметить, $|x|=\sqrt{x^2}$, т.е. эта функция является суперпозицией функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.

2. Очевидно, что ось ординат график не пересекает, поскольку при $x = 0$ значение функции не существует.

3. Очевидно, что исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической (проверьте!).

Как видим, п. 2 и 3 облегчения для исследования не дали.

4. Найдем нули и промежутки знакопостоянства функции. Для этого положим $y = 0$ и решим уравнение $|x|+\dfrac{1}{x}=0$, откуда получим $x = -1$. Нанесем эту точку на ось абсцисс. Таким образом, ось Ox разбилась точками $x = -1$ (нуль функции) и $x = 0$ (точка разрыва) на три участка знакопостоянства: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ и $(0;+\infty)$. Подставив в выражение для функции какие-нибудь контрольные точки из этих промежутков, например $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 1$, найдем знаки значений функции на этих участках. Нанесем их на числовую ось (рис. 4.15).

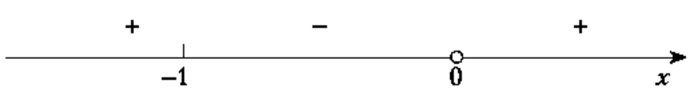


Рис. 4.15. **Области знакопостоянства функции к примеру 4.19**

5. Вычислим пределы функции в бесконечности и найдем асимптоты.

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0, \\ -x + \dfrac{1}{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Пусть $x > 0$. Для функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ мы уже находили асимптоты (см. пример 4.15): $x = 0$ и $y = x$. Изобразим асимптоты на плоскости Oxy. Для вертикальной асимптоты $x = 0$ найдем предел: $\lim\limits_{x \to +0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$. Отметим этот факт на плоскости Oxy — изобразим часть графика: кривую, уходящую вверх (в $+\infty$) справа от асимптоты.

Выясним, с какой стороны приближается график функции к наклонной асимптоте $y = x$. Для этого возьмем разность между функцией и асимптотой и оценим ее знак: $x + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1}{x} > 0$, так как $x > 0$. Таким образом, график функции лежит выше асимптоты. Отметим этот факт на плоскости Oxy (рис. 4.16).

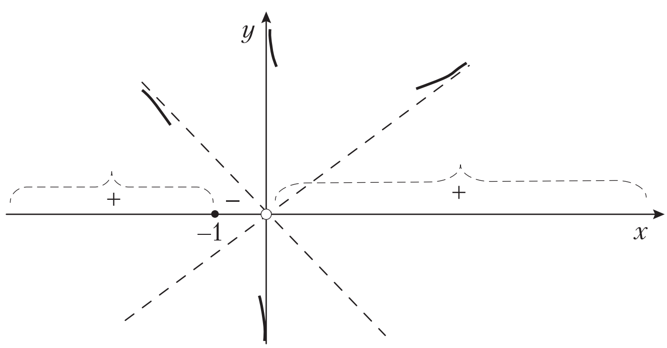


Рис. 4.16. **Наметки графика функции к примеру 4.19**

Найдем асимптоты для функции $y = -x + \dfrac{1}{x}$ при $x < 0$. Очевидно, вертикальная асимптота будет такой же: $x = 0$. Для нее найдем предел: $\lim\limits_{x \to -0}\left(-x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. Отметим это на плоскости Oxy. Для наклонной асимптоты будем иметь:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x + \dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty}\left(-1 + \frac{1}{x^2}\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}\left(-x + \frac{1}{x} - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

т.е. уравнение левой наклонной асимптоты имеет вид $y = -x$. Изобразим асимптоту на плоскости Oxy. Посмотрим, с какой стороны приближается график функции к этой асимптоте. Для этого возьмем разность между функцией и асимптотой и оценим ее знак: $-x + \dfrac{1}{x} + x = \dfrac{1}{x} < 0$, так как $x < 0$. Таким образом, график функции лежит ниже асимптоты. Отметим этот факт на плоскости Oxy (см. рис. 4.16).

Некоторые выводы относительно вида графика можно сделать уже сейчас. Например, ясно, что где-то на промежутке $(0; +\infty)$ функция должна иметь локальный минимум (пока нельзя исключать возможности, что локальных экстремумов может быть несколько, но ответ на этот вопрос даст следующий пункт схемы).

6. Вычислим производную функции, найдем критические точки и промежутки возрастания и убывания функции.

При $x<0$ получим $y' = \left(-x+\dfrac{1}{x}\right)' = -1-\dfrac{1}{x^2} < 0$, т.е. критических точек в этой области нет, и функция всюду на этой области убывает. Отметим это на числовой оси стрелкой, направленной вправо-вниз (рис. 4.17). Таким образом, эскиз левой ветви графика можно уже нарисовать: завершить намеченную линию, проведя ее через точку (–1; 0).

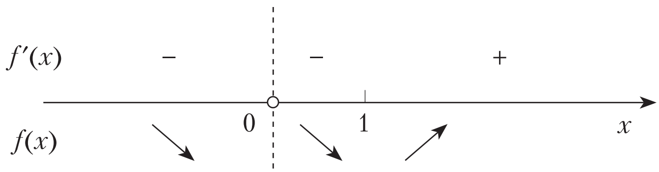


Рис. 4.17. **Области знакопостоянства первой производной к примеру 4.19**

При $x > 0$ получим $y' = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)' = 1-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, т.е. критическая точка в этой области одна ($x = 1$). Значение функции в ней равно $y(1) = 1+\dfrac{1}{1} = 2$. Отметим точку (1; 2) на плоскости Oxy. При $0 < x < 1$ производная отрицательна: $y' < 0$, т.е. функция убывает. Отметим это на числовой оси стрелкой, направленной вправо-вниз (см. рис. 4.17). При $x > 1$ производная положительна: $y' > 0$, т.е. функция возрастает (отметим это стрелкой, направленной вправо-вверх (см. рис. 4.17). Значит, в точке $x = 1$ имеем локальный минимум. Других экстремумов нет. Таким образом, эскиз правой ветви графика уже можно нарисовать: завершить намеченную линию, проведя ее через точку (1; 2) (рис. 4.18).

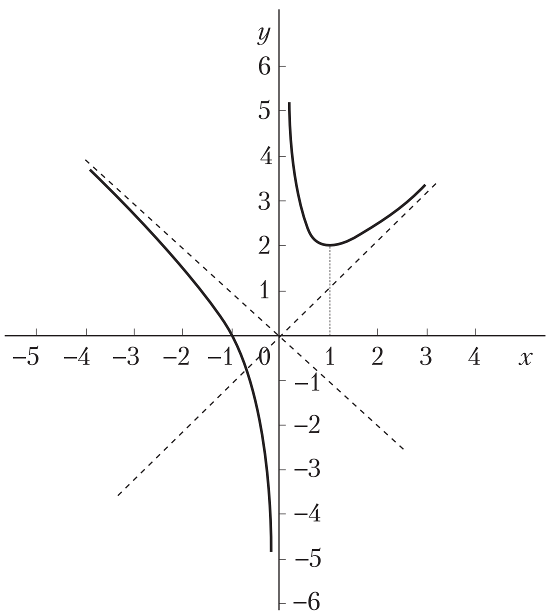


Рис. 4.18. **Окончательный вид графика функции к примеру 4.19**

7. Для проверки правильности построения графика на предмет выпуклости и вогнутости вычислим вторую производную. При $x < 0$ и при $x > 0$ получим $y'' = \frac{2}{x^3}$. Так что при $x < 0$ вторая производная отрицательна $(y'' < 0)$ — функция вогнута, а при $x > 0$ вторая производная положительна $(y'' > 0)$ — функция выпукла, что соответствует нарисованному нами графику.

В данном случае п. 7 лишь подтвердил правильность построения графика.

Пример 4.20

Построим график функции $y = \frac{x-1}{x^2+3}$.

Решение. 1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Функция непрерывна всюду.

2. $y(0) = -\frac{1}{3}$.

3. Функция ни четная, ни нечетная, ни периодическая (проверьте!).

4. Функция равна нулю в точке $x = 1$. Значения функции отрицательны на интервале $(-\infty; 1)$ и положительны на интервале $(1; \infty)$.

5. Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна на всей оси абсцисс. Для нахождения горизонтальных асимптот вычислим пределы:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0.$$

Таким образом, имеется общая горизонтальная асимптота $y = 0$. Из найденных интервалов положительности и отрицательности функции следует, что при $x \to -\infty$ график приближается к асимптоте снизу, а при $x \to +\infty$ — сверху.

По имеющейся информации для эскиза графика вырисовывается следующая предварительная картина (рис. 4.19).

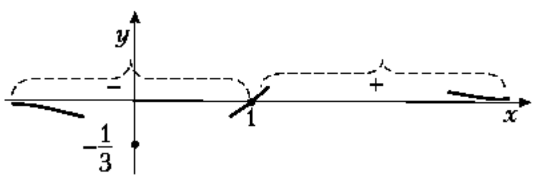


Рис. 4.19. **Предварительная картина для графика функции к примеру 4.20**

6. Вычислим производную, найдем промежутки возрастания и убывания функции и экстремумы:

$$y' = \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' = \frac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

По знакам производной найдем промежутки возрастания и убывания функции и экстремумы (рис. 4.20).

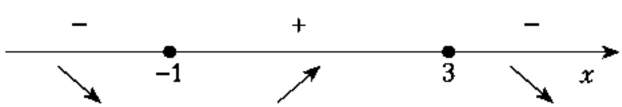


Рис. 4.20. **Интервалы знакопостоянства первой производной к примеру 4.20**

Таким образом, на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ функция убывает, а на интервале $(-1; 3)$ — возрастает. Отсюда следует, что в точке $x = -1$ имеет место локальный минимум, $y(-1)=\frac{-1-1}{(-1)^2+3}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$, а в точке $x = 3$ — локальный максимум, $y(3)=\frac{3-1}{(3)^2+3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

По уточненной информации получим более детальное представление о характере поведения графика функции (рис. 4.21).

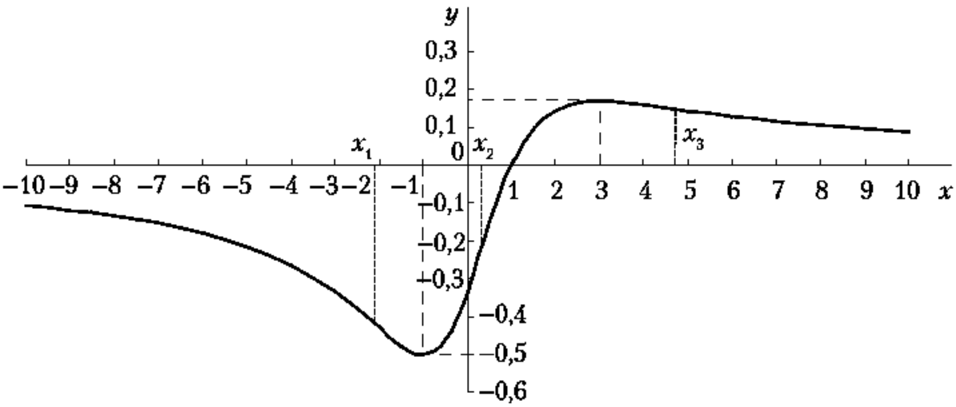


Рис. 4.21. **Окончательный вид графика функции к примеру 4.20**

7. Построение эскиза графика можно было бы на этом и закончить — для этого информации получено достаточно. Из графика очевидно, что, считая слева направо, сначала функция вогнута, затем — выпукла, потом опять вогнута, а затем опять выпукла, а между этими промежутками находятся точки перегиба. По полученным данным иначе график просто не нарисуешь. Точки перегиба можно найти с помощью второй производной, что позволит построить график еще более точно. Однако в данном случае вид второй производной достаточно сложен: $y''=\frac{2x^3-6x^2-18x+6}{(x^2+3)^3}$, и поиск ее нулей точными методами затруднителен. Приближенные же методы дают следующие значения нулей второй производной (слева направо): $x_1=-2{,}06$; $x_2=0{,}31$; $x_3=4{,}76$.

Пример 4.21

Построим график функции $y=e^{-x^2}$.

Решение. 1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Поскольку функция элементарная, она непрерывна всюду на области определения.

2. $y(0) = 1$.

3. Функция четная, непериодическая. Таким образом, достаточно построить ее график для $x \geq 0$, а затем зеркально отразить его относительно оси ординат.

4. Нулей функция не имеет, $y(x) > 0$ при всех x.

5. Вертикальных асимптот нет, так как функция всюду непрерывна. Для нахождения горизонтальных асимптот вычислим предел: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=0$. Следовательно, имеется общая горизонтальная асимптота $y = 0$, к которой функция приближается сверху, поскольку $y(x) > 0$ при всех x (рис. 4.22).

6. Вычислим производную: $y'=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

Отсюда следует, что $y' > 0$ при $x < 0$, $y' = 0$ при $x = 0$, $y' < 0$ при $x > 0$. Таким образом, при $x < 0$ функция возрастает, при $x > 0$ — убывает, а в точке $x = 0$ имеет место локальный максимум.

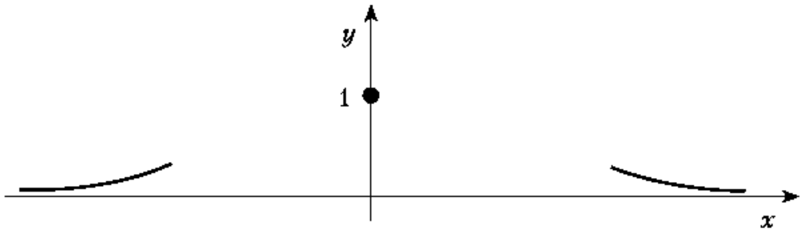


Рис. 4.22. **Предварительный эскиз функции к примеру 4.21**

7. Найдем области выпуклости, вогнутости и точки перегиба. Для этого вычислим вторую производную и определим ее знаки:

$$y'' = (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot(-2x) = 2e^{-x^2}\cdot(2x^2-1).$$

Поскольку $2e^{-x^2} > 0$, знак второй производной полностью определяется множителем $2x^2-1$. Разложим его на множители и найдем промежутки знакопостоянства: $2x^2-1 = 2\left(x^2-\frac{1}{2}\right) = 2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (рис. 4.23).

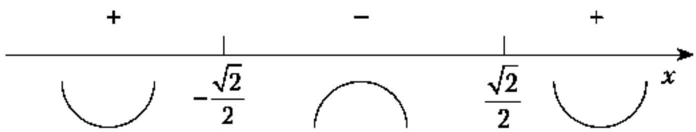


Рис. 4.23. **Области знакопостоянства второй производной к примеру 4.21**

Таким образом, функция выпукла на промежутках $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ и вогнута на промежутке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Точки $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба, $y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (рис. 4.24).

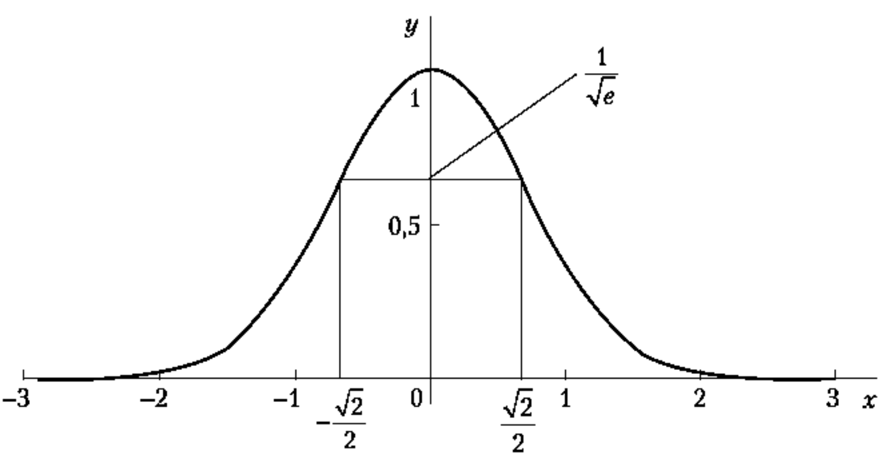


Рис. 4.24. **Окончательный вид графика функции к примеру 4.21**

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Поясните, почему в процессе исследования функции по указанной схеме следует одновременно строить эскизы элементов ее графика.
2. Поясните, почему исследование функции начинается с построения точек пересечения ее графика с осями координат.
3. Что дает для исследования функции установление ее четности, нечетности или периодичности?
4. Какого рода информацию для построения графика функции дает нахождение асимптот?
5. Что дает для построения графика функции вычисление ее первых и вторых производных?
6. Как может выглядеть график функции в окрестности точки, в которой первая производная равна нулю?
7. Как может выглядеть график функции в окрестности точки, в которой вторая производная равна нулю?
8. Может ли функция, имеющая горизонтальные асимптоты, быть неограниченной?
9. Может ли непрерывная функция, имеющая горизонтальные асимптоты (правую и левую), быть неограниченной?

Упражнения

4.39. Пусть известно, что дифференцируемая на всей числовой оси функция $y = f(x)$ имеет всего две точки экстремума: $x_1 = -3$, $f(-3) = 1$ и $x_2 = 2$, $f(2) = 5$.

а) Какого вида экстремум может быть в этих точках?

б) Что можно сказать о характере поведения функции на промежутках $(-\infty;-3)$, $(-3;2)$, $(2;+\infty)$?

в) Может ли быть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$?

4.40. Сколько точек экстремума и точек перегиба может иметь многочлен пятой степени?

4.41. Исследуйте по приведенной схеме следующие функции и постройте их графики:
а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; в) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; г) $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+2x-3}$; д) $y = x + \ln x$; е) $y = x\ln x$.

4.42. Изобразите графически характер поведения функций, рассматривая их как произведение двух функций: а) $y = x\sin x$; б) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

4.6. Исследование функции по ее графику

В предыдущем параграфе мы занимались построением графика функции по ее аналитическому выражению (формуле). Сейчас займемся в некотором смысле обратной операцией — исследованием функции по ее графику.

Задача состоит в том, чтобы по графику функции определить следующие параметры.

1. Наличие особенностей функции: разрывы, четность, нечетность, периодичность.

2. Нули функции, промежутки положительности и отрицательности.

3. Асимптотическое поведение функции.

4. Экстремумы, промежутки возрастания и убывания, оценки скорости возрастания и убывания.

5. Промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Покажем на конкретном примере, как решается эта задача.

Пример 4.22

Исследуем функцию по ее графику (рис. 4.25). Считаем, что тенденция изменения значений функции от аргумента при его стремлении к $\pm\infty$ сохраняется.

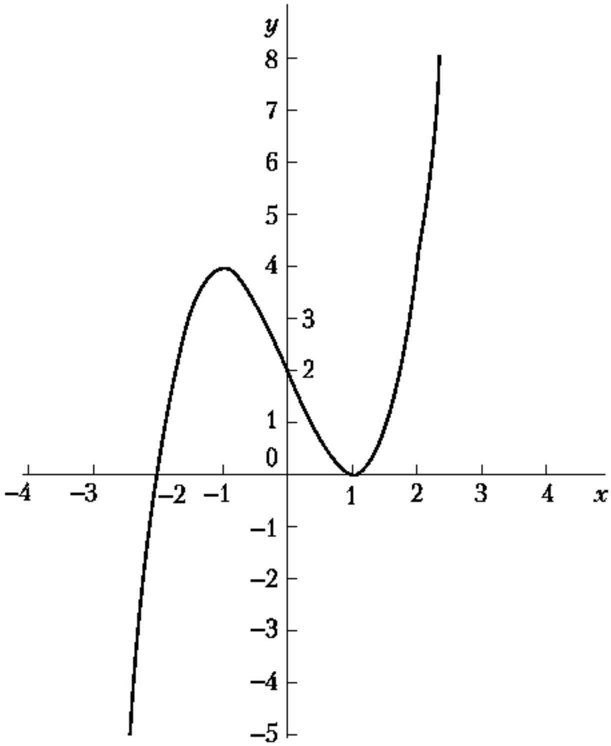


Рис. 4.25. **Исходный график к примеру 4.22**

Решение. 1. Как очевидно из графика, функция непрерывна, не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

2. Функция имеет нули в точках $x = -2$ и $x = 1$. На промежутке $(-\infty; -2)$ она отрицательна, на промежутках $(-2; 1)$ и $(1; +\infty)$ положительна.

3. При стремлении аргумента x к $-\infty$ значение функции стремится к $-\infty$, а при стремлении аргумента x к $+\infty$ значение функции стремится к $+\infty$. Асимптот нет.

4. Функция имеет локальный максимум в точке $x = -1$, его значение равно $y = 4$, и локальный минимум в точке $x = 1$, его значение равно $y = 0$. На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $(-1; 1)$ убывает. Динамика скорости роста функции следующая:

а) на промежутке $(-\infty; -1)$ скорость роста значений функции постепенно падает, видимо, от $+\infty$ (точно сказать нельзя) до нуля (производная положительна, но уменьшается от $+\infty$ до нуля);

б) на промежутке (−1; 1) скорость убывания сначала возрастает, а затем падает до нуля (производная отрицательна, сначала уменьшается от нуля до некоторого минимального значения, примерно до –3 — точно установить затруднительно, а затем увеличивается до нуля);

в) на промежутке (1; +∞) скорость роста значений функции постепенно возрастает от нуля, видимо, до +∞ (производная положительна и возрастает).

Скорость роста и убывания функции можно проиллюстрировать эскизом графика производной (рис. 4.26).

5. Функция вогнута на промежутке от −∞ до нуля и выпукла в остальной части области определения — на промежутке от нуля до +∞.

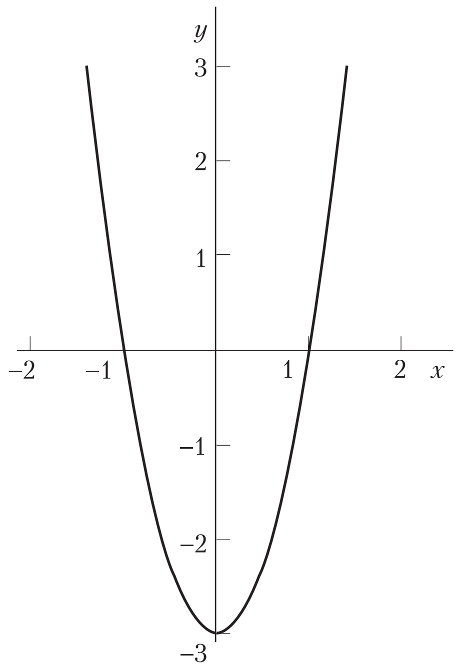


Рис. 4.26. **Эскиз графика производной к примеру 4.22**

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Как по графику функции определить точки, в которых производная равна нулю?
2. Как по графику функции определить области положительности и отрицательности производной?
3. Как по графику функции оценить величину производной?
4. Как по графику функции определить участки, где вторая производная положительна, отрицательна, точки, в которых вторая производная равна нулю?

Упражнения

4.43. Исследуйте функцию по ее графику, изображенному на рис. 4.27.

4.44. На рис. 4.28 изображена развертка движения велосипедиста по прямолинейному участку дороги: зависимость его смещения от времени. Опишите характер его движения словесно и уравнением; изобразите эскиз графика зависимости его скорости от времени и напишите соответствующее уравнение.

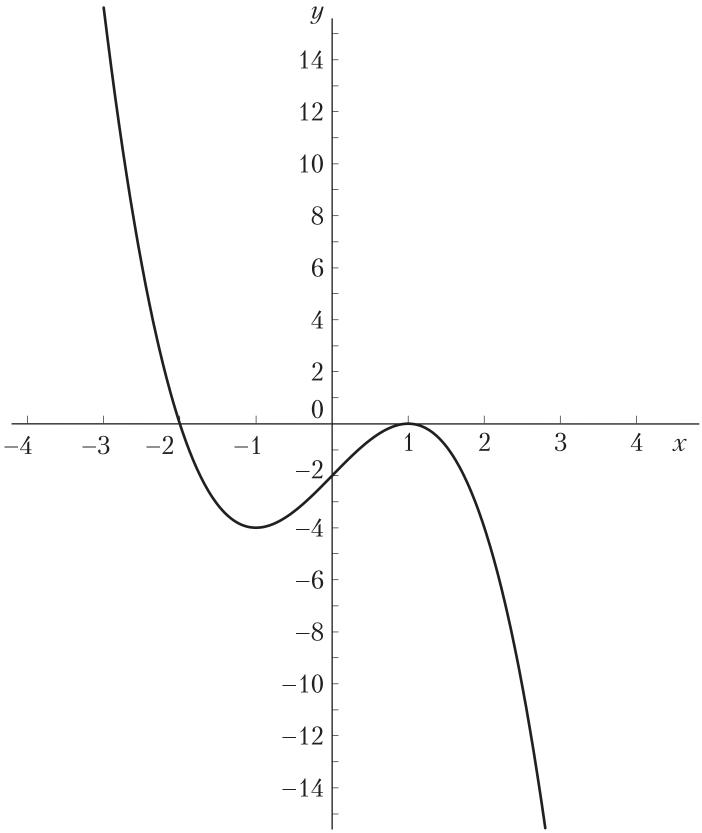


Рис. 4.27. **К упражнению 4.43**

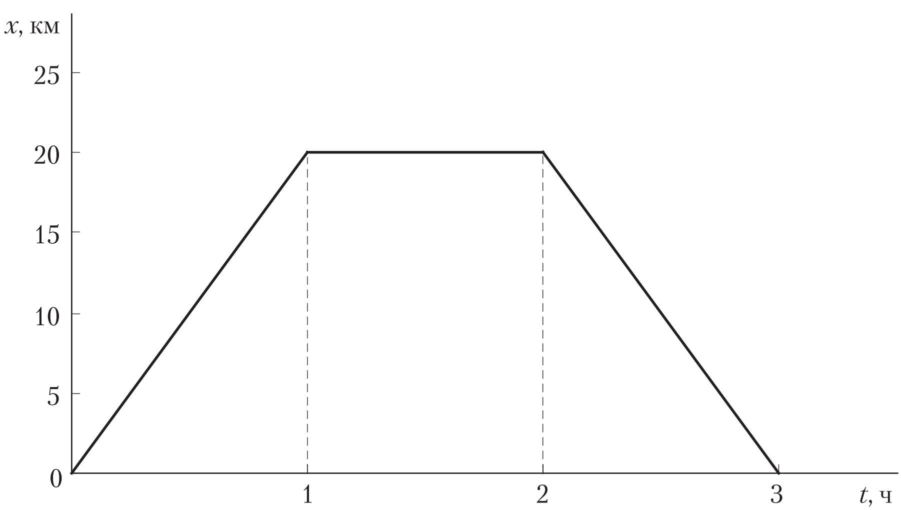


Рис. 4.28. **К упражнению 4.44**

4.45. На рис. 4.29 изображен график закона свободного падения тела с 45-метровой высоты (изменение высоты, на которой находится тело, от времени). Напишите его уравнение. Изобразите график скорости и ускорения движения тела (примите $g = 10$ м/с^2).

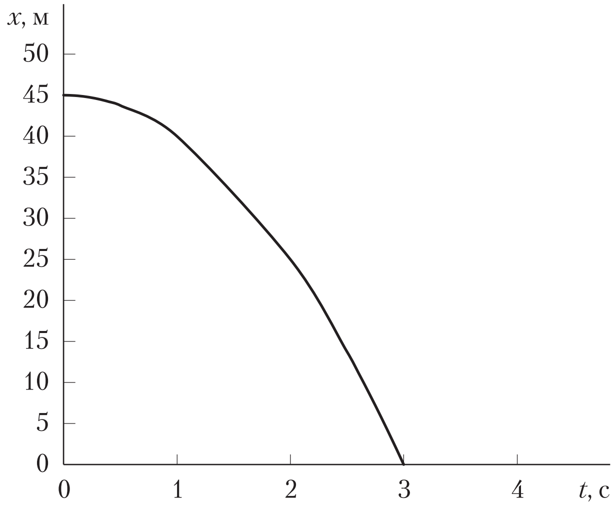


Рис. 4.29. **К упражнению 4.45**

Глава 5
ИНТЕГРАЛ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- определения и свойства первообразной, неопределенного и определенного интегралов;
- значения интегралов для простейших элементарных функций;
- геометрический смысл определенного интеграла;

уметь

- вычислять неопределенные и определенные интегралы с использованием их свойств;
- вычислять площади фигур на плоскости, ограниченных простейшими кривыми, объемы тел вращения;
- применять интегралы для решения задач на движение;

владеть

- навыками вычисления простейших интегралов;
- навыками вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения;
- навыками решения задач на движение тел.

Интеграл играет ключевую роль в решении дифференциальных уравнений, которыми описываются (как говорят математики, моделируются) многие явления, происходящие в природе и обществе. В этом параграфе мы познакомимся с основами интегрального исчисления, с такими основными его понятиями, как *неопределенный* и *определенный* интегралы. Увидим, какими путями пришли математики к этим различным между собой понятиям, а также узнаем об удивительной связи между ними, установленной великими учеными И. Ньютоном и В. Лейбницем с помощью формулы, названной их именами. Ознакомление начнем с истории возникновения и развития понятия интеграла и интегрального исчисления.

5.1. История развития понятия интеграла и интегрального исчисления

Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади сложных фигур и объемы произвольных тел. Предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности. Идея интегрального исчисления была предвосхищена древними учеными в гораздо большей мере, чем идея дифференциального исчисления. Первоначальная идея, приведшая к понятию определенного интеграла, связана с вычислением площадей плоских фигур. Она принадлежит величайшему математику древности Евдоксу Книдскому (IV в. до н.э.) и названа им методом исчерпывания. Идея состоит в том, что в фигуру, площадь которой мы хотим измерить, последовательно вписываются многоугольники, площади которых мы умеем измерять, но таким образом, чтобы разность между измеряемой площадью и площадями вписываемых фигур стремилась к нулю. Этот вопрос подробно освещался в гл. 1.

Следующий крупный шаг в приближении к современному пониманию интегрального исчисления принадлежит Архимеду (287—212 гг. до н.э.). Развивая идею метода исчерпывания, он разработал и применил методы, по существу предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление. Так, для вычисления площади под отрезком параболы Архимед строит вписанные и описанные ступенчатые фигуры с равными по высоте ступенями (рис. 5.1). Здесь S — искомая площадь; s_n — площадь вписанной ступенчатой фигуры; S_n — площадь описанной ступенчатой фигуры; n — количество ступеней.

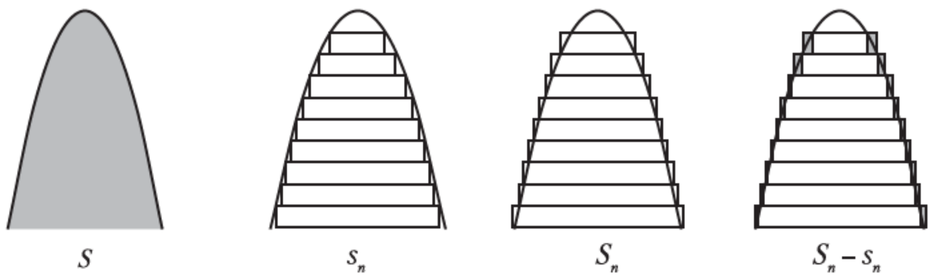


Рис. 5.1. **Ступенчатые фигуры Архимеда**

Очевидно, что при любом n имеет место неравенство $s_n < S < S_n$, причем при $n \to \infty$ разность $S_n - s_n \to 0$. Площади вписанных ступенчатых фигур образуют возрастающую ограниченную последовательность $\{s_n\}$, которая как вы уже знаете, имеет предел. А поскольку $S_n - s_n \to 0$, пределы последовательностей $\{s_n\}$ и $\{S_n\}$ совпадают и равны S.

Фактически для вычисления площадей ступенчатых фигур Архимед использует так называемые *интегральные суммы*, которые фигурируют в настоящее время в определении *определенного интеграла*. Действительно, если ширину ступенек обозначить через h_i, а высоту — через Δx, то площадь ступенчатой фигуры будет равна $\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x$, что является аналогом интегральных сумм.

Однако у Архимеда еще нет общих понятий предела и интеграла, нет и общего алгоритма интегрального исчисления. Его выкладки всегда связаны с решением конкретных геометрических задач.

Следующие серьезные шаги в развитии интегрального исчисления были сделаны лишь спустя 2000 лет, в XVII в., когда, с одной стороны, были достигнуты значительные успехи в области алгебры, создана необходимая символика, а с другой — все более интенсивно развивались экономика, естествознание и техника, требовавшие более общих и мощных методов.

Весомый вклад в развитие интегрального исчисления в XVII в. внесли И. Кеплер (1571—1630), открывший законы движения планет, а также Б. Кавальери (1589—1647), Дж. Валлис (1616—1703), П. Ферма (1600—1665) и Б. Паскаль (1623—1662). Однако завершенный вид интегральное (и дифференциальное) исчисление приобрело после работ И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

Ньютон и Лейбниц с разных сторон подошли к понятию интеграла, но в итоге получили один и тот же результат.

Ньютон так формулирует проблему: «По данному уравнению, содержащему флюксии (производные), найти соотношение между флюэнтами (функциями)». Это общая проблема решения так называемых *дифференциальных уравнений*, которая базируется на задаче отыскания функции (так называемой *первообразной*[1]) $F(x)$, *если известна ее производная* $f(x)=F'(x)$.

Именно эта задача приводит к понятию неопределенного интеграла, современное обозначение которого $\int f(x)dx$. Как будет показано в параграфе 5.2, она имеет решение с точностью до произвольной постоянной $C\in\mathbb{R}$: $\int f(x)dx=F(x)+C$. Поэтому интеграл и называется «неопределенным».

Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла возникло у Ньютона из геометрии как задача *квадратуры кривой* (вычисления площади под кривой). Рассмотрим эту задачу.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая только неотрицательные значения. Требуется найти площадь под кривой, являющейся графиком этой функции, точнее — площадь фигуры, ограниченной указанной кривой, осью абсцисс и вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.2). Такая фигура называется криволинейной трапецией, поскольку она имеет два параллельных основания (вертикально расположенных): $x = a$ и $x = b$.

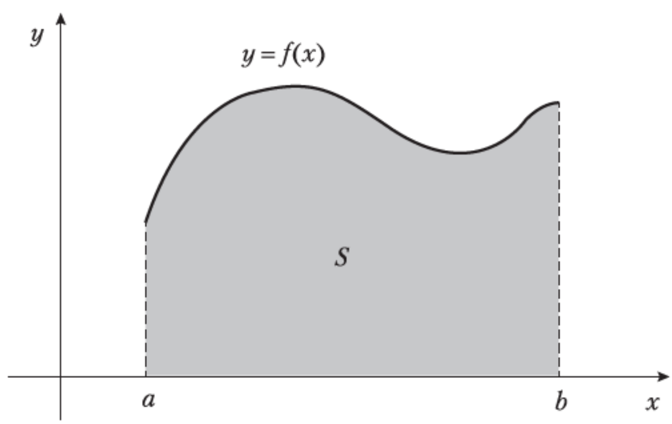


Рис. 5.2. **Криволинейная трапеция**

[1] Термин «первообра́зная» (ударение в слове ставится на четвертом слоге) ввел в начале XVIII в. Ж. Л. Лагранж.

Ньютон рассматривает функцию $S(x)$, равную площади части этой криволинейной трапеции, ограниченную отрезком $[a; x]$ вместо $[a; b]$ (рис. 5.3). Так что $S(a) = 0$ — трапеция вырождается в отрезок, а $S(b) = S$ — искомая площадь всей криволинейной трапеции.

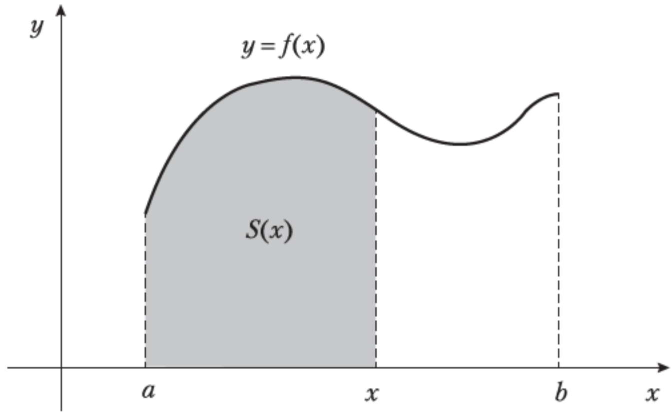


Рис. 5.3. **Функция $S(x)$ как площадь криволинейной трапеции**

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $S(x)$. Ньютон берет приращение аргумента Δx и анализирует, насколько при этом изменится площадь: $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ (рис. 5.4).

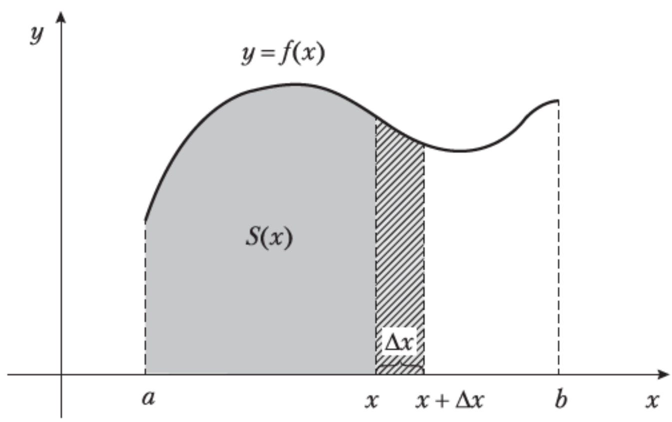


Рис. 5.4. **Изменение площади при малом приращении**

Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$. Тогда, очевидно, выполняется двойное неравенство:

$$m \cdot \Delta x \leq \Delta S \leq M \cdot \Delta x, \text{ или } m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M.$$

Если устремить Δx к нулю, то в силу непрерывности функции и наименьшее, и наибольшее значения функции на отрезке $[x; x + \Delta x]$ будут стремиться к значению функции в точке x, т.е. к $f(x)$. Таким образом,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Но по определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x)$. Отсюда следует, что $S'(x) = f(x)$, т.е. $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Итак, пусть мы умеем находить первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$. Как упоминалось выше, первообразная определяется с точностью до постоянного слагаемого: $F(x) = S(x) + C$. Но так как $S(a) = 0$, то отсюда следует, что $C = F(a)$ и, таким образом, $S(x) = F(x) - F(a)$. А искомая площадь $S = S(b) = F(b) - F(a)$.

Как мы уже упоминали, площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу (пределу интегральных сумм), а первообразная ассоциируется с неопределенным интегралом. Таким образом, формула $S = F(b) - F(a)$ устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами. В современной записи она выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ или } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл[1].

Эта формула носит название *формулы Ньютона — Лейбница*.

Как мы видели, Ньютон явно не оперировал интегральными суммами, а только подразумевал, что площадь криволинейной трапеции есть предел интегральных сумм, т.е определенный интеграл. Он оперировал первообразной $S(x)$.

Лейбниц к этой формуле пришел из других соображений — обратным путем, отправляясь от определенного интеграла — интегральных сумм $S = \lim\limits_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x_i$ (рис. 5.5). Способ его рассуждений довольно сложен, и мы его приводить не будем. Он же ввел символику, которая используется в настоящее время: $\int ydx$. Символ $\int$ представляет как бы удлиненную букву S (от латинского слова *summa*), выражение ydx (или $f(x)dx$) напоминает структуру слагаемых суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Термин «интеграл» (от лат. *integer* — целый, т.е. целая (вся) площадь) был предложен в 1690 г. Иоганном Бернулли и одобрен, хотя и неохотно, Лейбницем, который до этого пользовался выражением «сумма всех ydx».

Дальнейшее развитие интегрального исчисления шло в направлениях более строгого построения теории интегрирования, углубления ее результатов, составления таблицы интегралов для конкретных функций, обобщения понятия интеграла. В развитие теории интегрирования внесли значительный вклад такие замечательные математики, как Л. Эйлер, Дж. Лагранж, О. Коши, К. Гаусс, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов,

[1] Обозначение определенного интеграла символом $\int_a^b$ ввел О. Коши.

Б. Риман, А. Лебег и многие, многие другие. Теория интегрирования продолжает развиваться и по сей день.

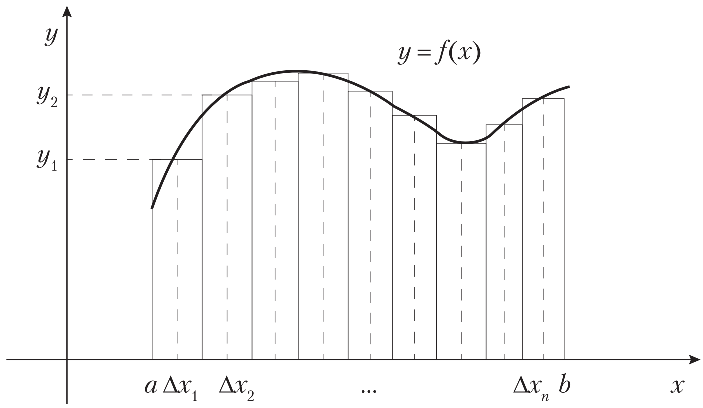


Рис. 5.5. **Интегральные суммы Лейбница**

5.2. Первообразная и неопределенный интеграл

5.2.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла

В гл. 3 мы познакомились с операцией взятия производной (дифференцированием). Эта операция каждой «достаточно хорошей», как говорят математики — *гладкой*, функции $f(x)$ ставит в соответствие ее производную $f'(x)$. Теперь мы познакомимся с обратной операцией: для заданной функции $f(x)$ будем подыскивать такую функцию $F(x)$, производная от которой равна заданной функции: $F'(x) = f(x)$. Такая функция, если она существует, называется первообразной для заданной функции $f(x)$, а операция нахождения первообразной — интегрированием. Так, например, функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$.

Определение 5.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке[1], если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Если функция имеет первообразную, то она называется интегрируемой на этом промежутке.

Операция нахождения первообразной гораздо сложнее, чем операция взятия производной, и фактически она во многом непосредственно базируется на определении: нужно догадаться, какая функция будет иметь производную, совпадающую с заданной функцией. Хотя, конечно, для нахождения первообразных сложных функций существует ряд приемов, облегчающих поиск. С некоторыми из этих приемов мы с вами познакомимся.

[1] Имеется в виду непустой конечный или бесконечный промежуток, не вырождающийся в точку.

Пример 5.1

Найдем первообразную для функции $f(x) = x$.

Решение. Согласно определению нужно подобрать такую функцию $F(x)$, чтобы для любого x выполнялось равенство $F'(x) = x$. Мы знаем, что при дифференцировании степенной функции показатель степени уменьшается на единицу. Попробуем взять в качестве первообразной функцию, степень которой на единицу больше: $F(x) = x^2$. Но тогда будем иметь $F'(x) = (x^2)' = 2x$, что не совсем то, что нам нужно, — мешает коэффициент 2. Но мы знаем, что при дифференцировании функции коэффициент можно вынести за знак производной: $(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x)$. Таким образом, нужно подобрать такой коэффициент, который после вынесения за знак производной сократится с двойкой. Очевидно, такой коэффициент равен 1/2. Итак, в качестве искомой первообразной можно взять $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Действительно, $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$.

Однако можно заметить, что если к функции прибавить постоянную величину, ее производная не изменится. Так, если к функции $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ прибавить, например, единицу: $F_1(x) = F(x) + 1 = \frac{1}{2}x^2 + 1$, производная останется прежней: $F_1'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x + 0 = x$. Следовательно, $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ также будет первообразной для функции $f(x) = x$, как и любая функция вида $y = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$.

Этот пример показывает, что первообразная определяется неоднозначно, причем если к некоторой первообразной прибавить произвольную константу, то вновь полученная функция снова будет первообразной. Данное наблюдение уточняется следующей теоремой, утверждающей, что этим и исчерпывается все множество первообразных для данной функции.

Теорема 5.1. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $G(x)$ будет первообразной для $f(x)$ на этом промежутке в том и только том случае, если $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, т.е. все первообразные для функции $f(x)$ имеют вид $F(x) + C$* (рис. 5.6).

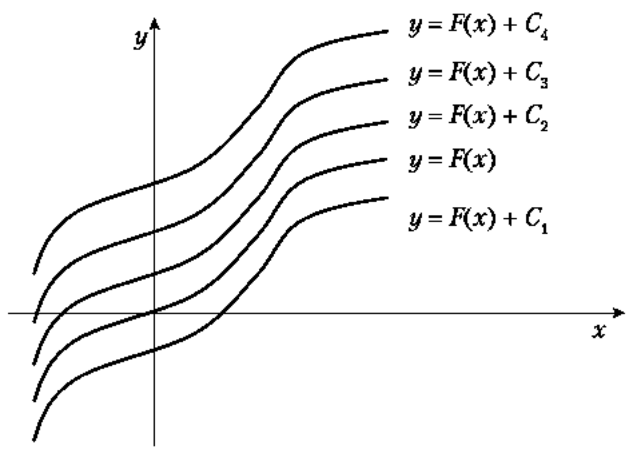


Рис. 5.6. **Семейство первообразных**

Доказательство. Доказательство разбивается на две части. Во-первых, нужно доказать, что функция $G(x) = F(x) + C$ является первообразной для функции $f(x)$. А во-вторых, нужно доказать, что любая первообразная отличается от $F(x)$ на константу, т.е. имеет вид $F(x) + C$.

Первая часть доказательства очень проста и фактически уже продемонстрирована на рассмотренном примере:

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x),$$

т.е. если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и $G(x) = F(x) + C$ — первообразная для $f(x)$.

Вторая часть доказательства посложнее. Пусть $G(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$. Надо показать, что тогда $G(x) = F(x) + C$. Для этого рассмотрим разность $h(x) = F(x) - G(x)$. Поскольку обе функции: и $F(x)$, и $G(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то

$$h'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Но так как производная функции $h(x)$ тождественно равна нулю на заданном промежутке, функция $h(x)$ является на этом промежутке константой.

Действительно, предположим, что $h(x)$ не константа. Тогда в каких-то двух точках x_1 и x_2 из этого промежутка она принимает различные значения $y_1 = h(x_1)$ и $y_2 = h(x_2)$. Отсюда по теореме Лагранжа (см. теорему 3.4 из гл. 3) существует такая точка $x \in (x_1; x_2)$, что $h'(x) = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, а это противоречит условию $h'(x) \equiv 0$. ■

Итак, первообразная для заданной функции определяется с точностью до произвольной постоянной. Близким к понятию первообразной является понятие неопределенного интеграла.

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, а C пробегает множество всех действительных чисел.

Пример 5.2

Пусть $F(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Тогда $F'(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)' = 3x^2 + 4x$. Таким образом, $F(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ — одна из первообразных для функции $f(x) = 3x^2 + 4x$. Отсюда следует, что неопределенный интеграл для $f(x) = 3x^2 + 4x$ будет равен

$$\int f(x)dx = \int (3x^2 + 4x)dx = x^3 + 2x^2 + 1 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Поскольку C пробегает множество всех действительных чисел, $1 + C$ также пробегает множество всех действительных чисел. Поэтому результат может быть записан проще: $\int (3x^2 + 4x)dx = x^3 + 2x^2 + C$.

5.2.2. Непосредственное интегрирование. Таблица интегралов

Поскольку интегрирование является обратной операцией к операции дифференцирования, то путем обращения таблицы производных основных элементарных функций можно получить соответствующую таблицу неопределенных интегралов.

1. $(C)'=0, C=\mathrm{const}\in\mathbb{R}\Rightarrow\int 0\cdot dx=C$.
2. $(x)'=1\Rightarrow\int 1\cdot dx=x+C$, или просто $\int dx=x+C$.
3. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}\Rightarrow\int\alpha x^{\alpha-1}dx=x^{\alpha}+C$.

$$x\in\mathbb{R}\text{ при }\alpha\in\mathbb{N},\ \alpha\neq 1,$$
$$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\text{ при }\alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\leq 0,$$
$$x\in\mathbb{R},\ x\geq 0\ \text{ при }\alpha\notin\mathbb{Z},\ \alpha>0,$$
$$x\in\mathbb{R},\ x>0\ \text{ при }\alpha\notin\mathbb{Z},\ \alpha<0.$$

Однако такая формула не очень удобна, поскольку степенная функция взята с коэффициентом, да еще связанным с показателем степени. Удобнее было бы иметь формулу для x^{α}. Поступим, как в примере 5.1: учтем, что при дифференцировании степенной функции показатель становится коэффициентом и уменьшается на единицу, а коэффициент при функции выносится в качестве множителя. Таким образом, если мы возьмем в качестве $F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, то $F'(x)=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=\dfrac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)\cdot x^{\alpha}=x^{\alpha}$.

Итак, $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad\alpha\neq-1$, при тех же ограничениях на x в зависимости от α.

4. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a\Rightarrow\int a^x\cdot\ln a\,dx=a^x+C,\quad a>0$.

Воспользовавшись тем же приемом, для показательной функции получим $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

В частности, $\int e^x dx=e^x+C$.

5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ \ x>0,\ \Rightarrow\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+C,\ x>0$.

Однако можно расширить интегрирование функции $y=\dfrac{1}{x}$ и на отрицательные значения аргумента. Для этого заметим, что при $x<0$ $(\ln(-x))'=$ $=-\dfrac{1}{-x}=\dfrac{1}{x}$. Отсюда следует, что при $x<0$ $\int\dfrac{dx}{x}=\ln(-x)+C=\ln|x|+C$.

Таким образом, для логарифмической фунции можно записать общую формулу $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C, x\neq 0$.

Для тригонометрических и обратных тригонометрических функций имеем следующие формулы.

6.1. $(\sin x)'=\cos x,\ x\in\mathbb{R},\Rightarrow\ \int\cos x dx=\sin x+C,\ \ x\in\mathbb{R}$.

6.2. $(\cos x)'=-\sin x,\ x\in\mathbb{R},\ \ \Rightarrow\ \int(-\sin x)dx=\cos x, x\in\mathbb{R}$.

Однако удобнее иметь формулу для синуса без знака «минус». Очевидно, что $(-\cos x)'=-(-\sin x)=\sin x$, откуда $\int\sin x dx=-\cos x+C,\ x\in\mathbb{R}$.

6.3. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, x\in\mathbb{R}, x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\Rightarrow\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C, x\in\mathbb{R}, x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

6.4. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n, \Rightarrow \int\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \operatorname{ctg} x + C, x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n,$ или, поскольку $(-\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n,$ то $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, x \in \mathbb{R},$ $x \neq \pi n.$

7.1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1),\ \Rightarrow\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ x \in (-1; 1).$

7.2. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R},\ \Rightarrow\ \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,\ x \in \mathbb{R}.$

Сведем полученные результаты в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Таблица неопределенных интегралов

Функция	Первообразная (неопределенный интеграл)
$f(x) \equiv 0$	$F(x) = C$
$f(x) \equiv 1$	$F(x) = x + C$
$f(x) = x^{\alpha},\ \ \alpha \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ x \neq 0$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = a^x,\ \ \ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$f(x) = e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \sin x,\ \ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \ x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ x \neq \pi n$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1)$	$F(x) = \arcsin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x + C$

Пример 5.3

Найдем первообразную функции $y = \sqrt{x}$, которая при $x = 0$ равна нулю.

Решение. Область допустимых значений функции $y = \sqrt{x}$ — промежуток $[0; +\infty)$. На этом промежутке данная функция совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{2}}$. По формуле из табл. 5.1 имеем $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$, или первообразная $F(x) = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

По условию $F(0) = 0$. Отсюда следует, что $C = 0$ и, таким образом, $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

Заметим, что при $x = 0$ в равенстве $F'(x) = y(x)$ подразумевается односторонняя производная, поскольку $x \in [0; +\infty)$.

5.2.3. Свойства неопределенного интеграла

Прежде всего рассмотрим вопрос существования неопределенного интеграла. Оказывается, спектр функций, имеющих первообразную, довольно широк. Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5.2. *Всякая непрерывная на конечном или бесконечном промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.*

Эта теорема определяет лишь достаточные условия интегрируемости. На самом деле класс интегрируемых функций значительно шире. Так, многие разрывные функции могут иметь первообразные. Заметим, что если не всякая непрерывная функция имеет производную, то первообразную имеет любая непрерывная на промежутке функция.

Как отмечалось выше, существуют приемы, облегчающие нахождение первообразной (неопределенного интеграла). Рассмотрим некоторые из этих приемов. Но прежде отметим одно общее свойство, касающееся существования первообразной.

Теорема 5.3. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых, если последние существуют*[1]:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C_1$, $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ и $(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$. Отсюда следует, что $H(x) = F(x) + G(x)$ — одна из первообразных функции $h(x) = f(x) + g(x)$, а значит, $\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C$.

В то же время

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = F(x) + G(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная, так как сумма двух независимо выбираемых постоянных является произвольной постоянной, что и завершает доказательство теоремы. ■

Пример 5.4

Вычислим $\int (x^2 + \cos x)dx$.

Решение. Согласно доказанной теореме и табл. 5.1 имеем

$$\int (x^2 + \cos x)dx = \int x^2 dx + \int \cos x dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + C.$$

---

[1] Сумма функций рассматривается на промежутке, на котором определены обе функции.

Теорема 5.4. *Постоянный множитель (коэффициент) можно вынести за знак интеграла*[1]:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\int f(x)dx = F(x)+C$, тогда $F'(x)=f(x)$ и $(k\cdot F(x))' = k\cdot f(x)$. Значит, $\int k\cdot f(x) = k\cdot f(x) + C$ и $k\int f(x) = k[F(x)+C] = k\cdot F(x) + kC$. Поскольку C — произвольная постоянная, то при $k\neq 0$ произведение kC тоже пробегает все множество действительных чисел, и, значит, $\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$.

При $k = 0$ доказываемое равенство очевидно. ■

Пример 5.5

Вычислим $\int (2x^2-3x+1)dx$.

Решение. Воспользовавшись теоремами 5.3 и 5.4, а также таблицей интегралов, получим

$$\int (2x^2-3x+1)dx = 2\int x^2dx - 3\int xdx + \int dx =$$
$$= 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

Теорема 5.5. *Пусть* $\int f(x)dx = F(x)+C$, $x\in(a;c)$. *Тогда при любых* $k, b \in \mathbb{R}$, $k\neq 0$, $x\in\left(\frac{a-b}{k};\frac{c-b}{k}\right)$ *справедливо равенство*

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что поскольку при $x\in(a;c)$ значения $f(x)$ и $F(x)$ существуют, то и при $x\in\left(\frac{a-b}{k};\frac{c-b}{k}\right)$ значения $f(kx+b)$ и $F(kx+b)$ существуют. Далее, по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

что и доказывает формулу (5.1). ■

Для того чтобы можно было воспользоваться теоремой 5.5, нужно суметь представить подынтегральную функцию в виде $f(kx+b)$.

Пример 5.6

Вычислим интеграл $\int (3\sin 2x + e^{-x+1})dx$.

Решение. Сначала разложим данный интеграл на сумму двух интегралов и вынесем постоянный множитель, а затем воспользуемся формулой (5.1):

$$\int (3\sin 2x + e^{-x+1})dx = 3\int \sin 2x dx + \int e^{-x+1}dx =$$
$$= \frac{3}{2}(-\cos 2x) + \frac{1}{-1}e^{-x+1} + C = -\frac{3}{2}\cos 2x - e^{-x+1} + C.$$

[1] Имеется в виду, что интеграл, стоящий в правой части, существует.

Пример 5.7

Найдем все первообразные функции $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+1}$.

Решение. Преобразуем данное выражение, выделив целую часть, для чего разделим числитель на знаменатель как многочлен на многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x-1 & x+1 \\ \underline{-\,2x^2+2x} & 2x+1 \\ x-1 & \\ \underline{-\,x+1} & \\ -2 & \end{array}$$

Таким образом, $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+1}=2x+1-\dfrac{2}{x+1}$. Тогда

$$\int\frac{2x^2+3x-1}{x+1}dx=\int\left(2x+1-\frac{2}{x+1}\right)dx=2\int xdx+\int dx-2\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=2\frac{x^2}{2}+x-2\cdot\frac{1}{1}\cdot\ln|x+1|+C=x^2+x-2\ln|x+1|+C.$$

Теорема 5.5 является частным случаем более общей теоремы. При интегрировании сложных функций часто помогает прием, связанный с заменой некоторого выражения, входящего в аналитическое представление функции, на новую переменную $u = u(x)$. Так, если интегрируемую функцию $f(x)$ удается представить в виде $f(x)=g(u(x))u'(x)$, то

$$\int f(x)dx=\int g(u(x))u'(x)dx=\int g(u)du$$

с последующей подстановкой $u = u(x)$. Вычисления могут быть оформлены в стиле «подведения под знак дифференциала», т.е. без выписывания функции $u(x)$. При замене $u'(x)dx$ на du переменная u, рассматриваемая первоначально как функция от независимой переменной x, превращается в независимую переменную u. Проверка правильности подведения под знак дифференциала осуществляется обратной операцией — вычислением полученного дифференциала (должно совпасть с тем, что было).

Теорема 5.6. *Пусть* $\int f(x)dx=F(x)+C$, $f(x)=g(u(x))u'(x)$ и $\int g(u)du=$ $= G(u) + C$. *Тогда* $\int f(x)dx=G(u(x))+C$.

Доказательство. Используя правило дифференцирования суперпозиции функций, из условий теоремы получим

$$(G(u(x))+C)'_x=G'_u(u(x))\cdot u'(x)=g(u(x))\cdot u'(x)=f(x),$$

что и доказывает теорему. ■

Пример 5.8

Вычислим $\int(2x^2+3x+7)^3(4x+3)dx$.

Решение. Обозначим $u=2x^2+3x+7$. Тогда $u'=4x+3$ и

$$\int(2x^2+3x+7)^3(4x+3)dx=\int u^3du=\frac{u^4}{4}=\frac{(2x^2+3x+7)^4}{4}+C.$$

Решение можно оформить несколько иначе:

$$\int(2x^2+3x+7)^3(4x+3)dx=\int(2x^2+3x+7)^3d(2x^2+3x+7)=\frac{(2x^2+3x+7)^4}{4}+C.$$

Пример 5.9

Вычислим $\int\frac{\ln 2xdx}{4x}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{\ln(2x)\cdot dx}{4x}=\int\frac{\ln(2x)\cdot d(2x)}{2\cdot 4x}=$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\ln(2x)\cdot d(2x)}{2x}=\frac{1}{4}\int\ln(2x)\cdot d(\ln(2x))=\frac{\ln^2(2x)}{8}+C.$$

Здесь под знак дифференциала сначала подведена двойка (потому что под знаком логарифма стоит $2x$) и интегрируемое выражение разделено на 2, чтобы его значение не изменилось. Затем за знак интеграла вынесен множитель $\frac{1}{4}$ (чтобы в знаменателе осталось выражение, стоящее под знаком дифференциала). После этого под знак дифференциала подведена функция $\ln(2x)$, с учетом того что $d(\ln(2x))=\frac{d(2x)}{2x}$. После операции подведения под знак дифференциала полезно сделать проверку: $d(\ln(2x))=\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot dx=\frac{dx}{x}$.

В некоторых случаях при вычислении интегралов помогает подстановка вида $x = \varphi(t)$.

Теорема 5.7. *Пусть $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая строго монотонная функция, заданная на промежутке от t_1 до t_2, а $t=\varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция. Тогда на промежутке между $x_1=\varphi(t_1)$ и $x_2=\varphi(t_2)$ справедливо равенство*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5.2}$$

где $t=t(x)=\varphi^{-1}(x)$.

Доказательство. Пусть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t(x))+C$.

Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной и обратной функций, получим

$$(G(t(x))+C)'=G'(t)\cdot t'(x)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x),$$

что и доказывает формулу (5.2). ■

Замечание 5.1. При вычислении интеграла по формуле (5.2) происходит замена переменной x на t по правилу $x = \varphi(t)$. При этом дифференциал dx заменяется на выражение $\varphi'(t)dt$, т.е. имеет место равенство $dx=\varphi'(t)dt$. Это выражение называется ***дифференциалом функции*** $x = x(t)$. И вообще, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ ее дифференциал равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $df(x)=f'(x)dx$.

Замечание 5.2. Функция $x = \varphi(t)$, с помощью которой осуществляется замена, может быть как строго возрастающей, так и строго убывающей. Во втором случае будет $\varphi(t_1)>\varphi(t_2)$.

Пример 5.10

Вычислим $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. Очевидно, область определения подынтегральной функции: $x\in[-1;1]$.

Сделаем замену переменной: $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что на указанном промежутке функция $x=\sin t$ строго монотонно возрастает. Тогда $dx=(\sin t)'dt=\cos t\cdot dt$.

Подстановка дает

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt=\int\cos^2 t\cdot dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\int\frac{1}{2}dt+\int\frac{\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}.$$

Заметим, что $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t$, так как $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

После обратной подстановки $t=\arcsin x$ получаем

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}=\frac{t}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}=\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что такое первообразная и неопределенный интеграл? В чем состоит различие между этими понятиями?
2. На каком множестве значений аргумента рассматривается здесь понятие первообразной?
3. Если функция имеет первообразную, то сколько различных первообразных она имеет?
4. Могут ли две различные функции иметь одну и ту же первообразную?
5. Укажите, какие функции заведомо интегрируемы на отрезке.
6. Чему равен интеграл от разности функций? Докажите соответствующую формулу.
7. Чему равен интеграл от суперпозиции интегрируемой функции и линейной, когда линейная функция является внутренней и когда линейная функция является внешней?

Упражнения

5.1. Проверьте, что функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$.

5.2. Найдите какую-нибудь первообразную и неопределенный интеграл от функции $f(x)=0$.

5.3. Вычислите $\int 2dx$.

5.4. Найдите первообразную функции $y=x^3$, которая в точке $x=1$ принимает значение 4.

5.5. Найдите первообразную функции $y=e^x$, которая в точке $x=0$ принимает значение 0.

5.6. Найдите первообразную функции $y=\sin x$, которая в точке $x=0$ принимает значение -1.

5.7. Найдите первообразную функции $y=2\cos(3x+6)-\frac{3}{2x-1}$, которая в точке $x=-2$ равна нулю.

5.8. Найдите первообразную функции $y = \operatorname{tg}(x-1) + 2e^{2x-2}$, график которой проходит через точку (1; 0).

5.9. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2}{\sqrt{2x+1}}dx$; б) $\int \frac{x^2-2x-1}{x-1}dx$; в)* $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{2+\sin x}dx$; г)* $\int \sqrt{4-x^2}dx$; д)* $\int \sqrt{9-4x^2}dx$.

5.3. Определенный интеграл

5.3.1. Определение определенного интеграла

Как уже отмечалось в параграфе 5.1, к понятию определенного интеграла привела задача нахождения площадей и объемов сложных фигур нутсм их аппроксимации ступснчатыми фигурами. Ссйчас мы рассмотрим, как определяет определенный интеграл современная математика.

Пусть на отрезке $[a; b]$, $a < b$, задана непрерывная функция. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков: $[a; x_1], [x_1; x_2], ..., [x_{n-1}; b]$, не обязательно равных, и на каждом отрезке выберем произвольную точку: $\xi_1 \in [a; x_1]$, $\xi_2 \in [x_1; x_2], ..., \xi_n \in [x_{n-1}; b]$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = b - x_{n-1}$ и составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Эта сумма называется интегральной суммой. Если функция на отрезке $[a; b]$ неотрицательна, очевидно, что интегральная сумма равна площади ступенчатой фигуры (рис. 5.7, *а*). Если функция на отрезке $[a; b]$ неположительна, интегральная сумма равна площади ступенчатой фигуры со знаком «минус» (рис. 5.7, *б*). Если функция на отрезке $[a; b]$ знакопеременна, интегральная сумма равна разности соответствующих площадей (рис. 5.7, *в*).

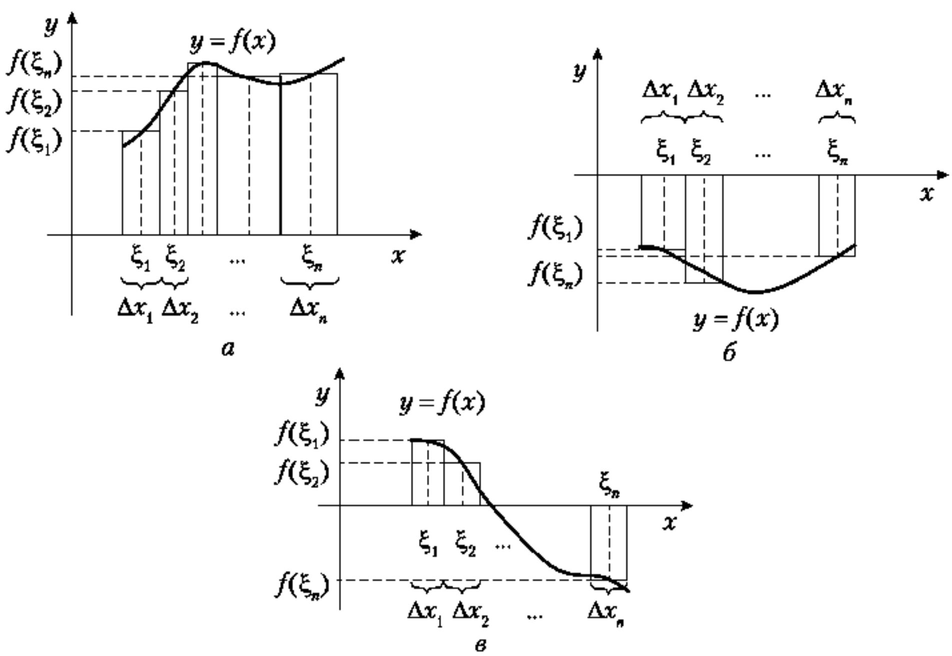


Рис. 5.7. **Варианты интегральных сумм**

Определение 5.3. Если предел интегральных сумм $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ при стремлении к нулю длины наибольшего из отрезков разбиения Δx_i существует и не зависит от того, каким образом разбит отрезок $[a;\, b]$ на части и как выбраны точки ξ_i, то он называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ (или от a до b):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

Число a называется нижним пределом интегрирования, число b — верхним пределом интегрирования.

Если нижний предел интегрирования больше верхнего ($a > b$), по определению считается, что $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то считается $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Таким образом, если первообразная — это функция, неопределенный интеграл — семейство функций, то определенный интеграл — это число.

Можно доказать, что если указанный предел интегральных сумм существует, он равен:

а) для неотрицательной функции — площади криволинейной трапеции (рис. 5.8, *а*);

б) для неположительной функции — площади криволинейной трапеции со знаком «минус» (рис. 5.8, *б*);

в) для знакопеременной функции — разности между площадями частей криволинейной трапеции, расположенных выше и, соответственно, ниже оси абсцисс (рис. 5.8, *в*).

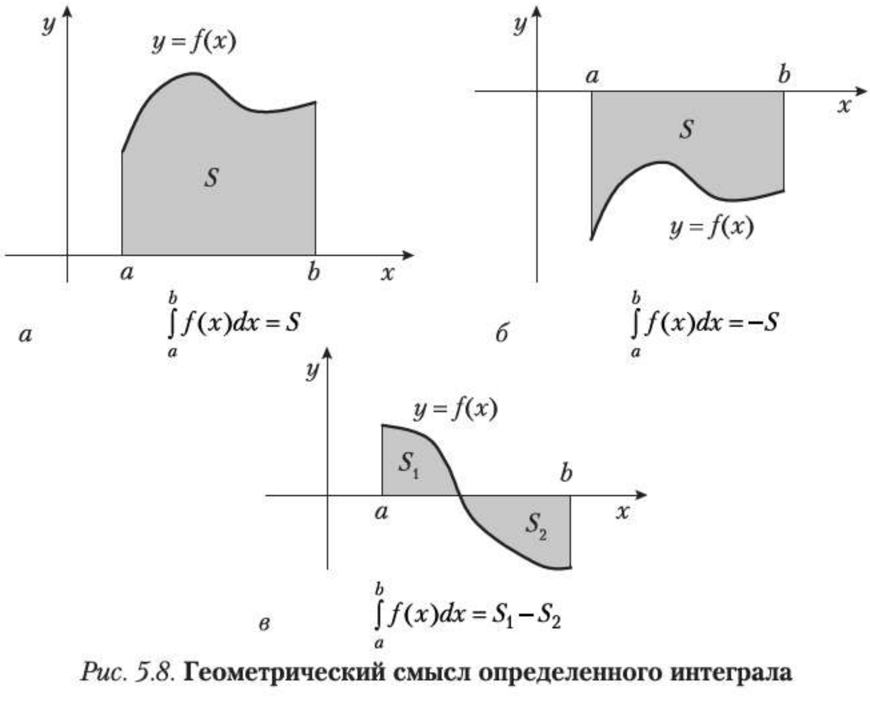


Рис. 5.8. **Геометрический смысл определенного интеграла**

5.3.2. Формула Ньютона — Лейбница

В параграфе 5.1 было показано, как Ньютону удалось связать понятия первообразной (а значит, и неопределенного интеграла) с понятием определенного интеграла, и, фактически дан вывод формулы Ньютона — Лейбница для неотрицательных функций:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Однако эта формула справедлива для функций любого знака.

Теорема 5.8. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$. *Тогда справедливо равенство*

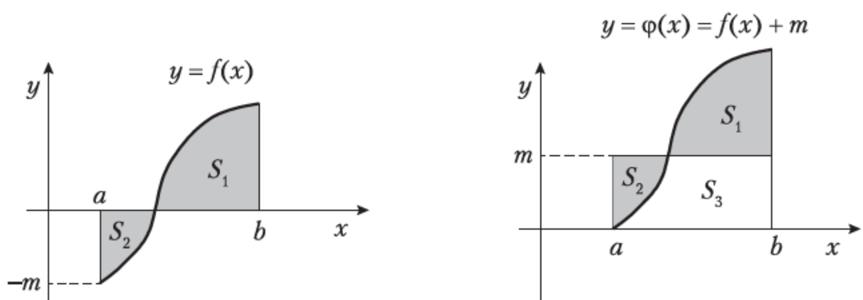
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ *— любая первообразная функции* $f(x)$.

Доказательство. Для неотрицательных функций $f(x)$, как уже говорилось, утверждение было доказано в параграфе 5.1.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная на отрезке $[a;\, b]$, принимающая на некотором множестве точек (или на всем отрезке) отрицательные значения (рис. 5.9, *а*). Обозначим через S_1 площадь фигуры, ограниченной положительной частью графика функции $f(x)$, осью абсцисс и вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$, а через S_2 — площадь фигуры, ограниченной отрицательной частью графика функции $f(x)$, осью абсцисс и вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$.

По теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает на этом отрезке своих максимального и минимального значений. Обозначим минимальное значение (отрицательное) через $-m$ $(m > 0)$ и рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) + m$ (рис. 5.9, *б*).



$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = S_1 + S_3 = S_1 + (b-a)\cdot m - S_2$$

а *б*

Рис. 5.9. **К доказательству теоремы 5.8**

Функция $\varphi(x)$ по построению неотрицательна на отрезке $[a;\, b]$. Как мы уже знаем, определенный интеграл от нее равен площади под ее графиком, т.е. $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = S_1 + S_3$, где S_3 — дополнительная площадь, образовавшаяся в результате сдвига графика вверх на m. Как нетрудно видеть, эта площадь равна площади прямоугольника, основанием которого является отрезок $[a; b]$, а высота равна m, за вычетом площади S_2: $(b-a)\cdot m - S_2$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = S_1 + S_3 = S_1 + (b-a)\cdot m - S_2. \tag{5.3}$$

С другой стороны, поскольку $\varphi(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, для нее справедлива формула Ньютона — Лейбница $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где $\Phi(x)$ — некоторая первообразная функции $\varphi(x)$, т.е. $\Phi'(x) = \varphi(x)$. Но тогда функция

$$F(x) = \Phi(x) - mx \tag{5.4}$$

будет первообразной для $f(x)$, так как $F'(x) = (\Phi(x) - mx)' = \Phi'(x) - m = \varphi(x) - m = f(x)$.

Таким образом, из формул (5.3) и (5.4) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 = \int\limits_a^b \varphi(x)dx - (b-a)\cdot m = \Phi(b) - \Phi(a) - (mb - ma) =$$
$$= (\Phi(b) - mb) - (\Phi(a) - ma) = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Пример 5.11

Вычислим $\int\limits_0^\pi \sin x dx$.

Решение. $\int\limits_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$

Пример 5.12

Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$, осью абсцисс и вертикальными линиями $x = 0$ и $x = 1$.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой требуется определить (рис. 5.10).

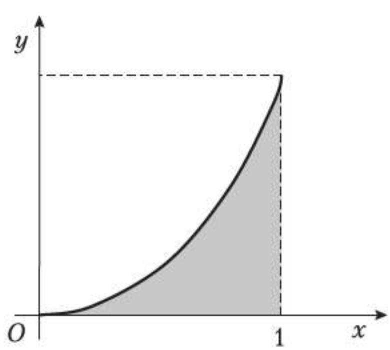


Рис. 5.10. **К примеру 5.12**

Искомая площадь равна $S = \int_0^1 x^2 dx$. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

Пример 5.13

Вычислим площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, ограниченной вертикальными линиями $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 5.11).

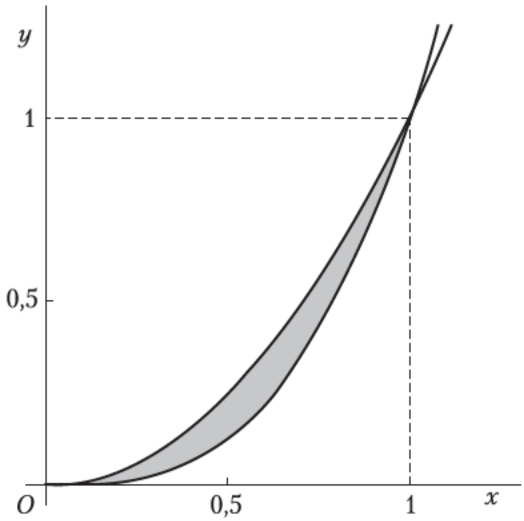


Рис. 5.11. **К примеру 5.13**

Решение. Очевидно, что искомая площадь S равна разности площадей S_1 под графиком функции $y = x^2$ и S_2 — под графиком функции $y = x^3$.

Таким образом,

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{12}$.

5.3.3. Свойства определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла вытекают из соответствующих свойств неопределенного интеграла и формулы Ньютона — Лейбница.

Теорема 5.9. *Для любых значений a, b и c справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Это свойство, в частности, позволяет вычислять интеграл фупкции, заданпой различными аналитическими выражениями на разных частях промсжутка иптсгрирования.

Пример 5.14

Вычислим интеграл $\int_1^5 f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & \text{при } x\in[1;\,3],\\ -x^2+6x-4 & \text{при } x\in(3;\,5]\end{cases}$ (рис. 5.12).

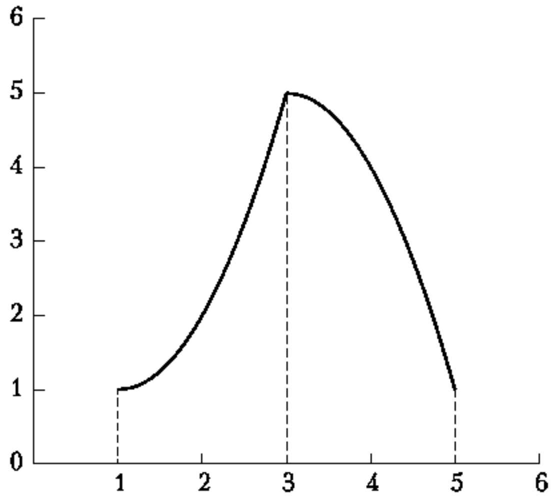


Рис. 5.12. **К примеру 5.14**

Решение. Имеем

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_1^3(x^2-2x+2)dx+\int_3^5(-x^2+6x-4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Bigg|_1^3+\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-4x\right)\Bigg|_3^5=$$

$$=(9-9+6)-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)+\left(-\frac{125}{3}+75-20\right)-(-9+27-12)=6-\frac{4}{3}-\frac{125}{3}+55-6=12.$$

Следующие три свойства непосредственно следуют из соответствующих свойств неопределенного интеграла.

Теорема 5.10. *Интеграл суммы функций равен сумме интегралов (если последние существуют)*:

$$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Теорема 5.11. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла*:

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx,$$

если последний интеграл существует.

Теорема 5.12 (подстановка). *Пусть подынтегральная функция является сложной функцией вида $f(kx + c)$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(kx+c)dx = \frac{1}{k}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt,$$

где $t = kx + c,\ k \neq 0,\quad t_1 = ka + c,\ \ t_2 = kb + c.$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. С использованием свойства подстановки для неопределенного интеграла $\left(\int f(kx+c)dx = \frac{1}{k}F(kx+c)+C\right)$ получим

$$\int_a^b f(kx+c)dx = \left(\frac{1}{k}F(kx+c)+C\right)\Bigg|_a^b = \left(\frac{1}{k}F(kb+c)+C\right)-\left(\frac{1}{k}F(ka+c)+C\right)=$$

$$=\frac{1}{k}(F(t_2)-F(t_1)) = \frac{1}{k}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \blacksquare$$

Свойство подстановки для определенного интеграла имеет дополнительное удобство по сравнению с аналогичным свойством для неопределенного интеграла, состоящее в том, что нет необходимости в обратной замене.

Пример 5.15

Вычислим интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} \sin(2x+1)dx.$

Решение. Сделаем замену переменных: $t = 2x+1, t_1 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = 0, t_2 = 2\cdot\frac{\pi-2}{4}+1 = \frac{\pi}{2}$

и воспользуемся доказанным свойством подстановки:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.16

Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 3x \sin 2x dx.$

Решение. Имеем

$$\int_0^{\pi/4}\sin 3x\sin 2xdx = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/4}\cos xdx - \int_0^{\pi/4}\cos 5xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 0{,}3\sqrt{2}.$$

Удобства подстановки в определенном интеграле особенно видны при использовании замены переменной вида $x = \varphi(t)$. Продемонстрируем это на примере вычисления площади полукруга.

Пример 5.17

Найдем площадь круга радиусом R.

Решение. Ранее (в гл. 1) площадь круга определялась как предел последовательности площадей вписанных многоугольников. Здесь продемонстрируем еще один способ вычисления площади круга с помощью определенного интеграла (предела интегральных сумм — вписанных ступенчатых фигур).

Поместим центр круга в начало координат и найдем площадь верхней части круга, расположенной выше оси абсцисс. Тогда уравнение верхней полуокружности примет вид $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (рис. 5.13).

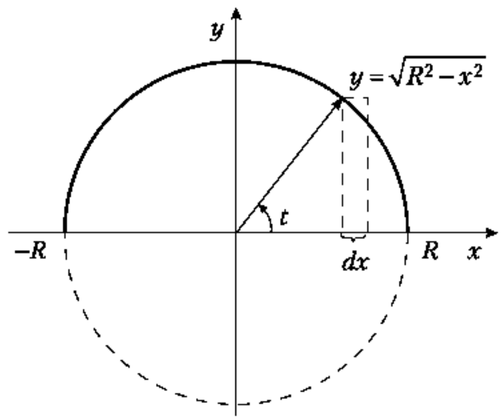


Рис. 5.13. **К примеру 5.17**

В соответствии с определением определенного интеграла площадь полукруга равна

$$S=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла сделаем следующую замену переменных: $x=R\cos t, t\in[0;\pi]$. Тогда нижний предел интегрирования $x_1=-R$ после подстановки будет равен $t_1=\pi$, а верхний предел $x_2=R$ после подстановки будет равен $t_2=0$. Дифференциал $dx=d(R\cos t)=(R\cos t)'dt=-R\sin t\cdot dt$.

Подставим полученные выражения в интеграл:

$$S=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot dx=\begin{pmatrix} x=R\cos t \\ t\in[0;\pi] \\ dx=-R\sin t dt\end{pmatrix}=\int_{\pi}^{0}\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}\cdot(-R\sin t)\cdot dt=$$

$$=R^2\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos^2 t)}\cdot\sin t\cdot dt=R^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot dt=R^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot dt=$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\int_0^{\pi}dt-\int_0^{\pi}\cos 2t dt\right)=\frac{R^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{R^2}{2}[\pi-0-(0-0)]=\frac{\pi R^2}{2}.$$

Здесь синус вынесен из-под корня со знаком «плюс»:

$$\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t,$$

поскольку при $t\in[0;\pi]$ $\sin t\geq 0$.

Площадь круга, таким образом, равна $S=\pi R^2$.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Что такое определенный интеграл? Каковы у него пределы интегрирования? Чем он отличается от неопределенного интеграла?
2. Чему равен определенный интеграл, если верхний предел интегрирования меньше нижнего или равен ему?
3. Какова геометрическая интерпретация определенного интеграла для функций, принимающих только положительные значения, отрицательные значения, как положительные, так и отрицательные значения?
4. Укажите, какая связь существует между неопределенным и определенным интегралами.
5. Какие свойства определенного интеграла аналогичны свойствам неопределенного интеграла, а какие специфичны для него?
6. Укажите, как вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций.

Упражнения

5.10. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$; в) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$; г) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$; д) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx$; е) $\int_{-\pi/3}^{0} \cos 3x dx$; ж) $\int_0^2 (3x^2-4x+5)dx$;

з) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; и) $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2x+1}}$; к) $\int_3^4 \frac{x^2-4x+5}{x-2}dx$.

5.11. Найдите площадь ограниченной фигуры, заключенной между линиями $y=(x-1)^2$ и $y=x-1$.

5.12. Найдите площадь ограниченной фигуры, заключенной между линиями $y=x^2-1$ и $y=-x^2+x$.

5.13. Найдите площадь фигуры $\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 9\}$.

5.14. Найдите площадь фигуры, состоящей из множества точек $\{(x,y) \mid -\frac{1}{x} \le y \le 0; 1 \le x \le 4\}$.

5.15. Вычислите интегралы:

а) $\int_{-1}^{1} (2x^2-3x+5)dx$; б) $\int_0^3 (x+2)(2x-1)dx$; в) $\int_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx$; г) $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}}dx$;

д) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$; е) $\int_0^{\pi/2} \sin 3x \cos 2x dx$; ж) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x dx$.

5.16. Найдите площадь фигуры, множество точек которой задается условием

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le f(x), \end{cases} \text{где } f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [0;1], \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \in (1;2]. \end{cases}$$

5.4. Применение интеграла для решения прикладных задач

5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Как показано при решении примера 5.13, площадь фигуры, ограниченной вертикальными линиями $x=a$ и $x=b$ и графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ при $x \in [a; b]$ (рис. 5.14), равна $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

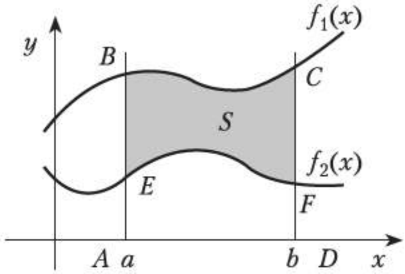


Рис. 5.14. **К вычислению площади фигуры**

Действительно, площадь фигуры, о которой шла речь, равна разности площадей криволинейных трапеций *ABCD* и *AEFD*, т.е.

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Полученная формула справедлива и в случае, когда графики функций пересекают ось абсцисс или лежат ниже ее.

Пример 5.18

Найдем площадь фигуры, множество точек которой задается следующей системой: $\begin{cases} 3x \leq y \leq 4 - x^2, \\ (x-2)(x+3) \leq 0. \end{cases}$

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой требуется найти. Начертим ее границы (рис. 5.15).

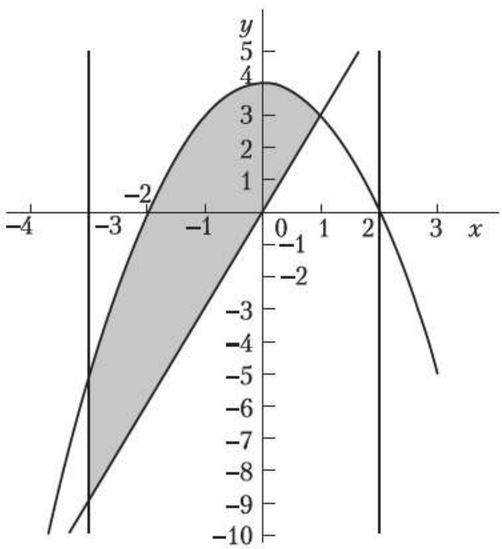


Рис. 5.15. **К примеру 5.18**

Рассматриваемая фигура лежит не выше параболы $y = 4 - x^2$ и не ниже прямой $y = 3x$. Таким образом, по оси абсцисс она простирается от $x = -3$ до $x = 1$. На полуинтервале $x \in (1; 2]$ эта фигура точек не имеет.

Таким образом,

$$S = \int_{-3}^{1} (4 - x^2 - 3x)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-12 + 9 - \frac{27}{2}\right) = 18\frac{2}{3}.$$

Данный метод может быть обобщен на вычисление площади фигуры, ограниченной непрерывной замкнутой линией, которая, хотя бы по частям, может быть описана с помощью непрерывных функций. Заметим, что площадь фигуры не зависит от того, как она расположена в декартовой системе координат.

Пусть задана такая область (рис. 5.16). В рассматриваемом примере ограничивающая ее кривая может быть разбита на четыре части, каждая из которых описывается своей функцией. Напомним, что функция — это однозначное соответствие, т.е. каждому x должно соответствовать единственное значение y.

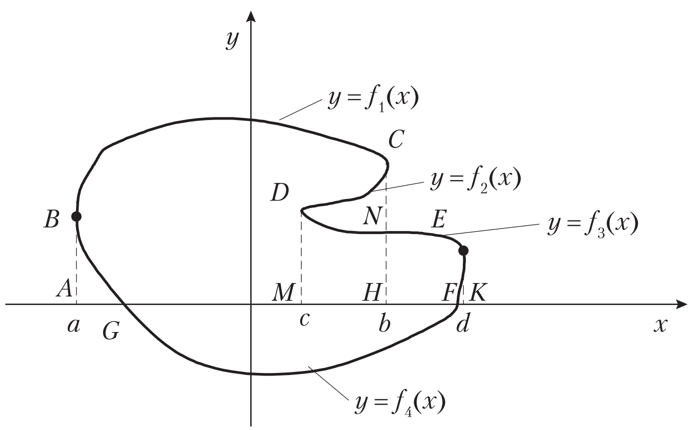


Рис. 5.16. **Область, описываемая непрерывными функциями**

Площадь области, изображенной на рис. 5.16, можно вычислить так:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_c^b f_2(x)dx + \int_c^d f_3(x)dx - \int_a^d f_4(x)dx,$$

т.е. если кривая лежит выше прилегающей к ней площади, интеграл от описывающей ее функции берется со знаком «плюс», а если ниже — со знаком «минус».

В самом деле, первый интеграл $\int_a^b f_1(x)dx$ определяет площадь криволинейной трапеции $ABCH$, ограниченной кривой $y = f_1(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Она включает два лишних куска: ABG и DCN.

Второй интеграл $\int_c^b f_2(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $MDCH$. Он вычитает один кусок площади (DCN), не входящий в S, но включенный в первый интеграл, а также $MDNH$, входящий в S.

Третий интеграл $\int_c^d f_3(x)dx$ определяет площадь криволинейной трапеции $MDEK$. Он включает входящий в S кусок $MDEF$ и не входящий — FEK.

Четвертый интеграл $\int_a^d f_4(x)dx$ равен разности двух площадей: площади части криволинейной трапеции, расположенной над осью абсцисс (ABG и EFK) и площади части криволинейной трапеции, расположенной под осью абсцисс (GF). Поскольку интеграл берется со знаком «минус», площади фигур ABG и EFK вычитаются, а площадь фигуры GF прибавляется.

Пример 5.19

Вычислим площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют системе $\begin{cases} x \le \frac{3}{2}|y|, \\ x \ge y^2 - 1 \end{cases}$ (рис. 5.17).

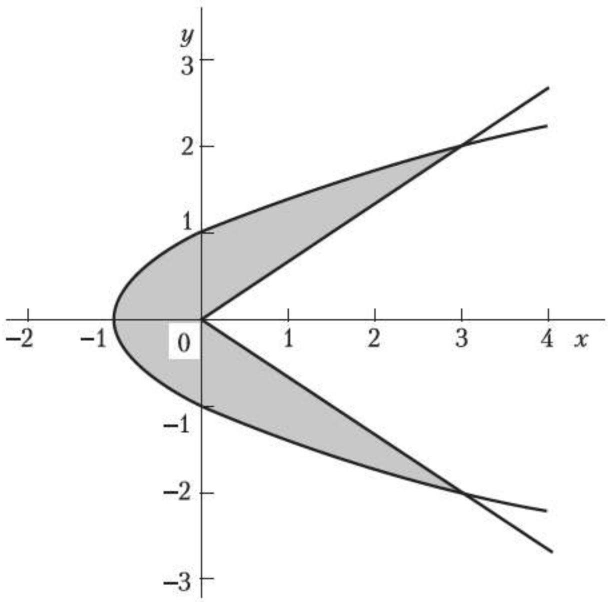


Рис. 5.17. **К примеру 5.19**

Решение. 1-й способ. Имеем

$$S = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx - \int_{-1}^{3} (-\sqrt{x+1})\,dx - \int_{0}^{3} \frac{2}{3} x dx + \int_{0}^{3} \left(-\frac{2}{3} x\right) dx = 2\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx - 2\int_{0}^{3} \frac{2}{3} x dx.$$

Вычислим $\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$. Сделаем замену переменных:

$$x+1=t, \quad t_1=-1+1=0, \quad t_2=3+1=4, \quad dx=dt.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx=\int_{0}^{4}\sqrt{t}dt=\int_{0}^{4}t^{\frac{1}{2}}dt=\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^4=\frac{2}{3}(4^{3/2}-0)=\frac{16}{3}.$$

Далее имеем $\int_0^3\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3=\left.\frac{x^2}{3}\right|_0^3=3.$

Итак, $S=2\left(\frac{16}{3}-3\right)=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$

2-й способ. Очевидно, что площадь фигуры не изменится при переименовании переменных $(x\leftrightarrow y)$, т.е. при преобразовании симметрии относительно прямой $y=x$ площадь исходной фигуры A равна площади ее образа A': $S(A)=S(A')$.

При таком преобразовании получим (рис. 5.18)

$$\begin{cases} y\le\frac{3}{2}|x|,\\ y\ge x^2-1.\end{cases}$$

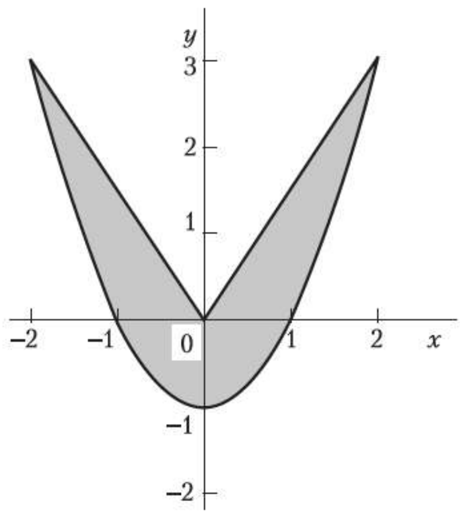


Рис. 5.18. **Результат переименования переменных**

Тогда

$$S=2\int_0^2\left(\frac{3}{2}x-(x^2-1)\right)dx=\int_0^2(3x-2x^2+2)dx=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+2x\right)\right|_0^2=6+4-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}.$$

Пример 5.20

Вычислим площадь фигуры, состоящей из множества точек

$$A=\{(x,y)\,|\,y\le x^2,\ y\le 2x-x^2,\ y\ge 0\}.$$

Решение. Рассмотрим множество A: построим его границы и определим, с какой стороны от границ оно расположено. Для уточнения границ найдем точки пересечения образующих их линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0);$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0),\ (1;1);$$

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x) = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0),\ (2;0).$$

Теперь изобразим фигуру, площадь которой требуется определить. Неравенства $y \le x^2$, $y \le 2x - x^2$ означают, что точки исследуемой фигуры расположены не выше соответствующих граничных линий (рис. 5.19).

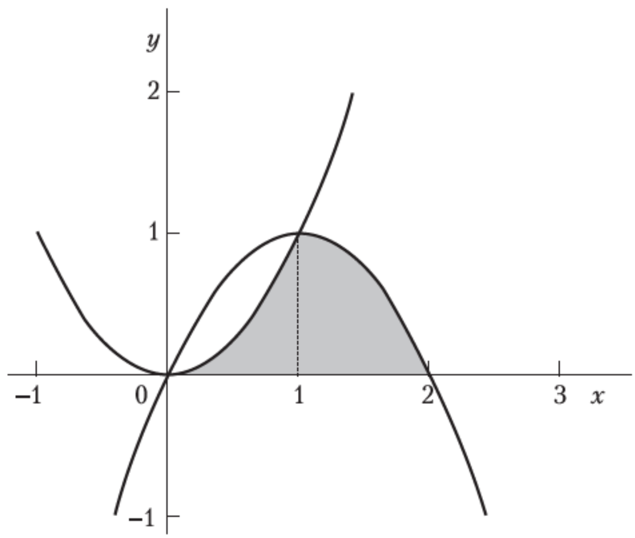


Рис. 5.19. **К примеру 5.20**

Таким образом,

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1.$$

5.4.2. Вычисление объемов тел вращения

С помощью определенного интеграла можно вычислять не только площади плоских фигур, но и объемы тел. Посмотрим, как можно вычислять объем так называемых тел вращения, т.е. пространственных тел, обладающих осевой симметрией.

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. Образуем криволинейную трапецию, ограниченную графиком этой функции, осью абсцисс и вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.20, *а*). Будем вращать эту криволинейную трапецию вокруг оси Ox. Получится некоторая фигура — тело вращения с осью симметрии Ox (рис. 5.20, *б*).

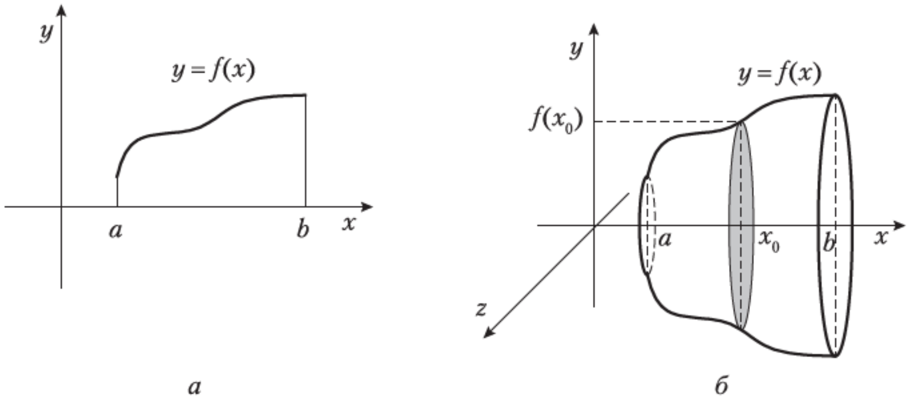


Рис. 5.20. **Криволинейная трапеция (*а*)
и тело ее вращения (*б*)**

В сечении этой фигуры плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной оси Ox, образуется круг, причем радиус этого круга равен значению функции $f(x)$ в точке сечения: $R = f(x_0)$. Следовательно, площадь этого сечения равна $S(x_0) = \pi R^2 = \pi f^2(x_0)$.

Для вычисления объема полученного тела вращения поступим таким же образом, как поступил Ньютон для вычисления площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим функцию $V(x)$, равную объему части тела вращения, ограниченной отрезком $[a; x]$ вместо $[a; b]$ (рис. 5.21). Так что $V(a) = 0$ — тело вырождается в круг, а $V(b) = V$ — искомая площадь всего тела вращения.

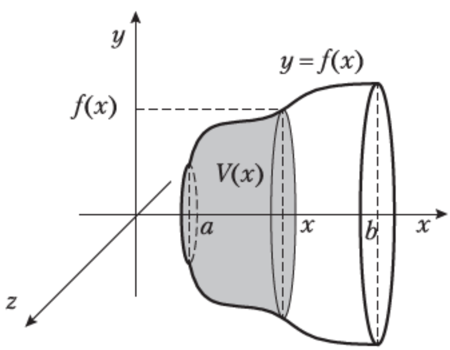


Рис. 5.21. **Функция $V(x)$ как объем тела вращения**

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $V(x)$. Возьмем приращение аргумента Δx и проанализируем, насколько при этом изменится объем: $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$ (рис. 5.22).

Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$. Тогда, очевидно, слой тела вращения объема ΔV может быть вписан в цилиндр высотой Δx и радиусом M (т.е. объема $\pi M^2 \Delta x$), а в него может быть вписан цилиндр высотой Δx и радиусом m (т.е. объема $\pi m^2 \Delta x$). Таким образом, выполняется двойное неравенство: $\pi m^2 \cdot \Delta x \le \Delta V \le \pi M^2 \cdot \Delta x$, или $\pi m^2 \le \dfrac{\Delta V}{\Delta x} \le \pi M^2$.

Рис. 5.22. **Изменение объема при малом приращении**

Если устремить Δx к нулю, то в силу непрерывности функции и наименьшее, и наибольшее значения функции на отрезке $[x;\ x + \Delta x]$ будут стремиться к значению функции в точке x, т.е. к $f(x)$. Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x)$. Но по определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = V'(x)$. Отсюда следует, что $V'(x) = \pi f^2(x)$, т.е. $V(x)$ является первообразной для функции $\pi f^2(x)$.

Следовательно,

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (5.5)$$

Пример 5.21

Вычислим объем шара радиусом R.

Решение. Очевидно, что шар может быть представлен как тело вращения полукруга радиусом R вокруг своего диаметра. Поместим центр круга радиусом R в начало координат (рис. 5.23). Уравнение верхней границы криволинейной трапеции (полуокружности) имеет вид

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R;\ R].$$

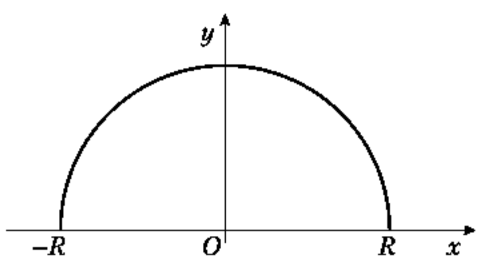


Рис. 5.23. **К примеру 5.23**

Таким образом, по формуле (5.5) имеем

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(\int_{-R}^{R}R^2dx-\int_{-R}^{R}x^2dx\right)=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

5.4.3. Решение задач на движение тел

С помощью интегрального исчисления можно решать не только геометрические задачи, но также задачи, возникающие из физики, техники, биологии, экономики и других областей знаний. Наиболее часто решаемыми с помощью интегрального исчисления являются задачи на движение. Рассмотрим примеры таких задач.

Пусть задана скорость прямолинейного движения тела в зависимости от времени: $v(t)$, и нужно найти точку x_2, в которой будет находиться тело в момент времени t_2, если в момент времени t_1 оно находится в точке x_1. Эта задача совпадает с задачей нахождения пройденного телом пути, если тело движется только в одном направлении.

Поскольку скорость — это производная от смещения тела, смещение является первообразной для скорости. Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt=x(t)\Big|_{t_1}^{t_2}=x(t_2)-x(t_1)=x_2-x_1.$$

Аналогичным образом можно находить скорость тела по заданному ускорению. Поскольку ускорение является производной скорости движения $a(t)=v'(t)$, скорость является нервообразной ускорения и, таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt=v(t)\Big|_{t_1}^{t_2}=v(t_2)-v(t_1).$$

Пример 5.22

Пусть дана зависимость скорости тела от времени: $v(t)=8t-4t^3$, $t\in[0;3]$. Найдем зависимость от времени смещения тела относительно начального положения и изобразим ее графически.

Решение. Смещение тела является первообразной для скорости. Поэтому

$$x(t)=\int v(t)dt=\int(8t-4t^3)\,dt=\frac{8t^2}{2}-\frac{4t^4}{4}+C=4t^2-t^4+C,\ t\in[0;3].$$

Константу C определим из начального условия $x(0)=0$ — смещение тела относительно начального положения в начальный момент времени равно нулю: $x(0)=4\cdot0^2-0^4+C=C=0$. Отсюда получим $x(t)=4t^2-t^4$.

Найдем нули функции $x(t)$:

$$x(t)=4t^2-t^4=0\Rightarrow t^2(4-t^2)=0\Rightarrow t=0,\ \ t=2.$$

Определим точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции $x(t)$:

$$x'(t)=v(t)=8t-4t^3=4t(2-t^2)=4t(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)\ \text{(рис. 5.24)}.$$

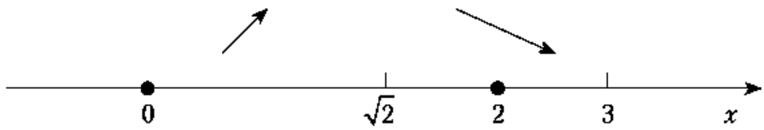


Рис. 5.24. **Промежутки возрастания и убывания функции к примеру 5.22**

Вычислим значение в точке максимума $t=\sqrt{2}$: $x(\sqrt{2})=4\cdot\sqrt{2}^2-\sqrt{2}^4=8-4=4$. Теперь можно изобразить график функции (рис. 5.25).

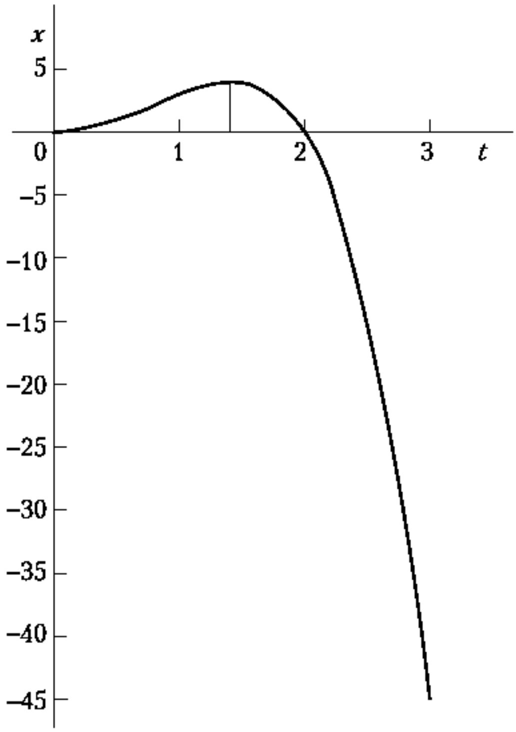


Рис. 5.25. **График функции к примеру 5.22**

По графику ясно, что при $t\in[0;\sqrt{2}]$ тело удаляется от начальной точки до отметки 4; при $t\in[\sqrt{2};\,2]$ приближается; при $t = 2$ тело находится в исходной точке, затем тело опять удаляется от исходного пункта, но в другую сторону до отметки $x(3)=4\cdot 3^2-3^4=-45$.

Пример 5.23

Определим тормозной путь автомобиля, ехавщего со скоростью 120 км/ч, если при торможении он двигался с постоянным замедлением в течение 3 с.

Решение. Поскольку при торможении автомобиль двигался равнозамедленно, его ускорение — постоянная отрицательная величина: $a(t)=a<0$. Тогда его скорость во время торможения имеет линейную зависимость от времени: $v(t)=\int a(t)dt=a\int dt=at+C$. Константу C можно найти из начального условия (момент времени в начале торможения положим равным нулю): $v(0)=120$ км/ч. Таким образом, $v(0)=a\cdot 0+C=C=120$ км/ч, т.е. $v(t)=at+120$.

В конце тормозного пути ($t = 3$ с) скорость автомобиля равна нулю. Отсюда можно найти ускорение a, но для этого нужно все величины перевести в единую систему измерения. Расстояния переведем в метры, время — в секунды. Тогда скорость 120 км/ч будет равна $\frac{120 \cdot 1000}{3600} = \frac{100}{3}$ м/с. Итак, $v(3) = a \cdot 3 + \frac{100}{3} = 0$, откуда $a = -\frac{100}{9}$ м/с^2.

Таким образом, $v(t) = -\frac{100}{9}t + \frac{100}{3}$ (м/с).

Поскольку движение при торможении происходило в одну сторону, пройденный путь совпадает со смещением, а производная от пути равна скорости: $s'(t) = v(t)$, и значит,

$$s(t) = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 \left(-\frac{100}{9}t + \frac{100}{3}\right)dt = -\frac{100}{9}\int_0^3 tdt + \frac{100}{3}\int_0^3 dt =$$

$$= -\frac{100}{9} \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^3 + \frac{100}{3}t\Bigg|_0^3 = -\frac{50}{9} \cdot 3^2 + \frac{100}{3} \cdot 3 = -50 + 100 = 50 \text{ (м)}.$$

Мы рассмотрели далеко не все возможные задачи, решаемые методом интегрирования. Так, не охвачены методы вычисления длины кривой, поверхности тела вращения и другие задачи, полный перечень которых вы найдете в основных учебниках по данному предмету.

Контрольные вопросы и задания

(Ответы обоснуйте, приведите необходимые примеры.)

1. Опишите алгоритм (схему) вычисления площади фигуры, лежащей выше графика функции $y = f_1(x)$ и ниже графика функции $y = f_2(x)$ при $x \in [a; b]$.
2. Опишите алгоритм (схему) вычисления площади фигуры, лежащей внутри замкнутой кривой.
3. Как вычислить объем тела вращения?
4. Чем отличается пройденный телом путь от смещения относительно некоторой точки отсчета?
5. Что мы находим путем интегрирования скорости при прямолинейном движении — пройденный телом путь или смещение?
6. Как по заданной функции скорости найти путь, пройденный телом, если оно двигалось по прямой линии в разные стороны?
7. Можем ли мы однозначно найти положение тела, если известна только зависимость его скорости от времени?
8. Можем ли мы однозначно найти скорость тела, если известна только зависимость его ускорения от времени?

Упражнения

5.17. Найдите площадь фигуры, множество точек которой удовлетворяет системе
$$\begin{cases}(y - x)(y - x^3) \le 0,\\ |x| \le 1.\end{cases}$$

5.18. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$ и $y = -|x| + 1$.

5.19. Найдите площадь фигуры, определенной условием $\begin{cases}0 \le y \le \sqrt{x},\\ y \le (x-2)^2,\\ x \le 2.\end{cases}$

5.20. С помощью определенного интеграла вычислите объем кругового конуса высотой H и радиусом основания R.

5.21. С помощью определенного интеграла вычислите объем усеченного кругового конуса высотой H и радиусами оснований R и r.

5.22. Найдите объем части кругового параболоида — тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x}$, осью абсцисс и вертикальным отрезком $x=h$.

5.23. Скорость тела зависит от времени: $v(t)=12t-3t^2$, $t\in[0;7]$. Найдите $x(t)$ — зависимость от времени смещения тела относительно начального положения и изобразите ее графически. Определите максимальное смещение тела от исходного положения в обе стороны и соответствующие моменты времени. Найдите также путь S, пройденный телом.

5.24. С высоты $h=20$ м со скоростью 5 м/с брошен вертикально вверх камень. Определите максимальную высоту камня над землей и время с момента броска до падения на землю (принять $g=10$ м/с^2). Изобразите график зависимости высоты камня над уровнем земли от времени.

5.25. Определите скорость автомобиля в начале торможения с постоянным замедлением, если тормозной путь составил 90 м, а время торможения равно 3 с.

5.26. Найдите путь, пройденный телом при свободном падении за первые 4 с (принять $g=10$ м/с^2).

Литература

1. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
2. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : в 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. — М. : Физматлит, 1996.
3. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа : в 2 т. : учеб. пособие / Г. М. Фихтенгольц. — 6-е изд., стер. — М. : Наука, 1968.
4. *Шагин, В. Л.* Функции и графики. Теория. Задачи. Решения. Ответы / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — М. : Вита-Пресс, 2007.

Новые издания по дисциплине «Математический анализ» и смежным дисциплинам

1. *Баврин, И. И.* Математический анализ : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. Высшая математика : учебник и практикум для СПО / И. А. Александрова [и др.] ; под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Малугин, В. А.* Математический анализ для экономистов : учебник и практикум для СПО / В. А. Малугин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

Ответы

Глава 1

1.1. а) Не может, так как a_3 не существует (но если нумерацию вести начиная с номера 4 или большего, то может); б) не может, так как в данном выражении $n \le 1000$, а последовательность по определению должна быть бесконечной; в) может; г) не может (a_2 не существует); д) может.

1.2. 1; 2; 3; $2\pi - 4$; $2\pi - 5$.

1.3. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{n+1}$.

1.5. 8.

1.6. а) 3; б) 4; в) 6.

1.7. 24.

1.8. $a_n = -\dfrac{3^{n-1}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

1.10. Всегда.

1.12. $n = 6$, $S = 132$.

1.13. $a_n = 4n + 1$, $d = 4$.

1.14. а) — г), е) Ограниченные; д) ограничена сверху, но не ограничена снизу.

1.15. а) Возрастающая; б) не монотонная; в) не монотонная.

1.18. Не монотонная, ограниченная.

1.19. Возрастающая, ограниченная.

1.20. $c \in (-1; 4,5)$.

1.26. При $n = 1$ и при $n \ge 5$.

1.28. $N = 1000$.

1.29. а) −1; б) 0.

1.33. 0.

1.34. а) 7; б) 0; в) 12; г) 4; д) 23/3; е) 113.

1.35. а) −1; б) 1; в) −1/2.

1.36. 1.

1.38. а) −1; б) −2; в) −1; г) 9; д) 0; е); ж) 9; з) −2; и) $-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}$; к) 0; л) $\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$; м) 1/3.

1.39. а) Расходится; б) 1; в) расходится.

1.40. 1.

1.41. 1.

1.42. 8 или −8/3.

1.43. $b_1 = 1$, $q = -1/2$.

1.44. 16/7.

1.45. а) 41/333; б) 17/4950; в) 167/165; г) 161/4950; д) 12487/900; е) 1.

1.46. 23/25.

1.47. 2/5.

1.48. 1/2.

1.49. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

1.50. 1/4.

1.51. 3/5.

1.52. –1/3.

1.53. 9/4.

1.55. $\pi/3$.

1.56. $\pi/16$.

1.57. $l = R\alpha$.

1.58. $1/(2\pi)$.

1.59. $10000/(7\pi)$, или 454 полных оборота.

1.60. $16 \cdot 10^3\pi \approx \approx 50$ тыс. км.

1.61. 3,(3).

1.62. 3π.

1.63. 9.

1.64. $4\pi/3 - 4$.

1.65. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

1.66. 2π.

Глава 2

2.3. 0.

2.4. а) 2/3; б) –1; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{8}$; д) $-\frac{1}{96}$; е) –36; ж) $-\frac{1}{18}$; з) –14; и) $-\frac{1}{12}$; к) $-\frac{27}{5}$; л) 2; м) $-\frac{7}{66}$; н) $\frac{162}{11}$; о) –1; п) 3; р) 9/2; с) –9/10.

2.8. Непрерывна на множестве $(-\infty;-3)\cup[-2;1]\cup(2;+\infty)$, разрывна в точках $x = -3$ и $x = 2$.

2.9. Например, а) $y=\sqrt{-x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\sqrt{-(x-1)^2(x-2)^2...(x-n)^2}$; множество точек непрерывности и разрыва пусто.

2.10. {–3; 1}.

2.11. 11,5.

2.12. Всюду разрывна.

2.13. Непрерывна в иррациональных точках, разрывна — в рациональных.

2.14. $f(1) = -2$ — наименьшее значение, $f(3) = 2$ — наибольшее значение.

2.15. а) $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; б) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sin 1\right]$; г) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$; д) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$;
е) $[\cos 1;\ 1]$; ж) $(0;\ 1]$; з) $(-\infty;\ +\infty)$; и) $[2;\ \log_2 5]$; к) $\left[-\frac{4}{3};-4\right]$;
л) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

2.16. 1 и 1/3.

2.17. Положительна при $x\in(-\infty;-2)\cup(3;4)$, отрицательна при $x\in(-2;3)$.

2.18. а) $x\in(1;5)$; б) $x\in(-1;1)$; в) $x\in[-4;3)\cup(-3;-2]\cup[2;3)\cup(3;4]$;
г) $x\in(-\infty;-5)\cup(1;5)$; д) $x\in\{-3\}\cup(2;3)\cup[4;6]\cup\{7\}$;
е) $x\in(-5;-4)\cup[-1;2)\cup\{6\}\cup\{8\}\cup(10;13]$;
ж) $x\in\left(-3;\ -\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2};+\infty\right)$; з) $x\in(-\infty;1-\sqrt{26})\cup(\sqrt{26}+1;+\infty)$;
и) $x\in(-\infty;6-\sqrt{13}]\cup\{6\}\cup[\sqrt{13}+6;+\infty)$; к) $x\in\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$;
л) $x\in[-2;14]$; м) $x\in[1;3]$; н) $x\in(-\infty;0)\cup[1;2]$;
о) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2-\sqrt{15})\cup[6;+\infty)$; п) $x\in[2;3]$;
р) $x\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup[2;5)$; с) $x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{9}{7};2\right]\cup(5;\infty)$;
т) $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right)\cup[2;5)$; у) $x\in(-\infty;0)\cup(0;1/2]$; ф) $x\in[3;+\infty)$;
х) $x\in[-2;-1)\cup[0;1]$.

2.19. $x\in(0;1/2)\cup[1;2)\cup(3;6]$.

2.20. При $a\in(-\infty;1]$ $x\in[1;+\infty)$, при $a\in(1;5)$ $x\in(-\infty;1/2\log_2(a-1)]\cup\cup[1;+\infty)$, при $a\in\{5\}$ $x\in(-\infty;+\infty)$, при $a\in(5;+\infty)$ $x\in(-\infty;1]\cup[1/2\log_2(a-1);$ $+\infty)$.

2.24. $-\frac{5}{3}$.

2.26. На полуинтервале (2; 3] функция непрерывна; кроме того, точка $x=-1$ принадлежит области определения функции, но не является ни точкой непрерывности, ни точкой разрыва — это изолированная точка (она не является предельной точкой области определения функции).

2.29. а) $-1/2$; б) $-5/2$; в) $5/2$; г) 0; д) 0; е) 0; ж) $-\pi/2$; з) 0.

2.30. 1,99.

2.31. а) Не произойдет — функция $v(t)$ монотонно возрастает; б) 450 м^3.

2.32. а) $\frac{a_n}{b_m}$; б) ∞; в) 0.

2.33. $+\infty$.

2.34. а) $-\infty$; б) $+\infty$.

2.37. а) Не существует; б) $+\infty$; в) $-\infty$.

2.38. а) 0; б) $+\infty$; в) 1; г) 1; д) 0.

Глава 3

3.1. 2,5.

3.2. 10.

3.3. а) 1; б) $2x$; в) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; г) $-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; д) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(3+2x)^2}}$; е) $-\frac{3}{2\sqrt{(3x-1)^3}}$.

3.4. 27 м/с.

3.5. $v = 12$ м/с; $a = 12$ м/с^2; $v_{ср} = 4$ м/с.

3.6. $\omega = 11$ с$^{-1}$; $v = 33$ м/с.

3.7. а) 2; б) 1; в) 3; три касательные.

3.8. –7.

3.9. Может, например $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x \geq 0,\\ -1 \text{ при } x<0;\end{cases}$ правосторонняя производная в точке $x = 0$ равна нулю.

3.10. Например, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0.\end{cases}$

3.11. 28, функция возрастает.

3.12. а) $y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $[0;+\infty)$ — множество точек возрастания;
б) $y'=-\frac{1}{x^2}+2x$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ +\infty\right)$ — множество точек возрастания, $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ — множество точек убывания; в) $y'=1+\cos x$, $(-\infty;\ +\infty)$ — множество точек возрастания.

3.13. Например, $y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+\frac{x}{2} \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0.\end{cases}$

3.14. Например, $y = x^3$, $x_0 = 0$.

3.15. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

3.16. $1 - 3x^2$.

3.17. $3x^2 +1$.

3.18. –4.

3.19. Например: $u(x)=\sqrt[3]{x}$, $v(x)=x-\sqrt[3]{x}$; в точке $x = 0$ производные $u'(x)$ и $v'(x)$ не существуют, а $(u(x)+v(x))'=1$.

3.20. $-\frac{2}{x^3}$.

3.21. $5\sqrt{x^3}-4{,}5\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.22. –4.

3.23. $-\frac{3}{(x-2)^2}$.

3.24. $-\frac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)^2}$.

3.25. $\left.\dfrac{2x^2+4x-2}{(x+1)^2}\right|_{x=0}=-2.$

3.26. $-\dfrac{1}{(x-1)^2}.$

3.27. $\dfrac{2}{(x-3)^2}.$

3.28. $-\dfrac{48x}{(2x^2-1)^5}.$

3.29. $5(3x-x^2)^4\cdot(3-2x).$

3.30. 6.

3.31. $\dfrac{2}{3}.$

3.35. а) 10; б) 20.

3.36. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

3.37. $x=y^2+1,\ y\in[1;+\infty),\ y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

3.38. $y'=\dfrac{x+1}{2\sqrt[4]{(x^2+2x-8)^3}},\ y'(4)=\dfrac{5}{16}.$

3.39. $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

3.40. а) $-\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{3}}}{6(x-1)^2}$; б) $y'=\dfrac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+5}}$; в) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}-\dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}$;

г) $\dfrac{9}{4}\sqrt[8]{x}$; д) $\dfrac{5}{2\sqrt[6]{x}\sqrt[5]{x-1}}-\dfrac{3\sqrt[6]{x^5}}{5\sqrt[5]{(x-1)^6}}-\dfrac{3}{2\sqrt{x+2}}.$

3.41. $S_n=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$

3.42. $S_n=\dfrac{n(-x)^{n+1}-(n+1)(-x)^n+1}{(x+1)^2}.$

3.43. а) $2e^{2x}$; б) $-3e^{-x}+(2\ln 3)x3^{x^2-1}$; в) $(2\ln 3-1)\sqrt{3^{2x+3}e^{-x}}$.

3.44. а) $\dfrac{2}{x\ln 3}$; б) $\dfrac{4x+3}{(2x^2+3x-1)\ln 10}$; в) $\dfrac{x-1}{x^2-2x-1}$;

г) $(2+\sin x)^x\cdot\left(\ln(2+\sin x)+\dfrac{x\cos x}{2+\sin x}\right)$; д) $x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right).$

3.45. а) $-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$; б) $2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$;

в) $\dfrac{\dfrac{2\cos x}{\cos^2 2x}+\sin x\cdot\operatorname{tg}2x+1}{\cos^2 x}$; г) $\sin 2x+2x\cos x^2$; д) $-(\sin x)\cos(\cos x)$;

е) $-\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2(\operatorname{ctg}x)}$; ж) $2x\sin(2x^2)+9(1-2x)\sin(x-x^2)\cos^2(x-x^2)$.

3.46. а) $-\dfrac{12}{1+16x^2}$; б) 0; в) $\dfrac{2(\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.48. $y'=0$. Вывод: функция постоянна на тех множествах, где она непрерывна, т.е. на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$. Поскольку $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$, то

$$y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},\ x>0,\\ -\dfrac{\pi}{2},\ x<0.\end{cases}$$

3.50. а) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},\ x\ge 0$; б) $x(2\ln x+1),\ x>0$;

в) $\sin x+x\cos x+2x\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^2}{1+x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

г) $-\dfrac{3}{(x-2)(x-5)}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-6}},\ x>6$; д) $2^x(\cos x^2\ln 2-2x\sin x^2),\ x\in(-\infty,+\infty)$;

е) $\dfrac{\log_2 e-\log_2 x}{x^2},\ x>0$; ж) $-\sin x\cdot\cos(\cos x),\ x\in(-\infty,+\infty)$;

з) функция не дифференцируема (область определения функции — изолированные точки) ; и) $\dfrac{\cos x}{(2\sin x+1)\sqrt{\ln(2\sin x+1)}},\ x\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(2\pi n;\pi+2\pi n)$;

к) $e^{2x}\left(2\ln(x^2+3x+2)+\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}\right),\ x\in(-\infty;2)\cup(-1;+\infty)$;

л) $5(x^2-3x+1)^4(2x-3),\ x\in\mathbb{R}$; м) $(3x+1)^2(x-1)^4(24x-4),\ x\in\mathbb{R}$;

н) $(x^2-3x+1)^2(2x^3+x-1)^3(36x^4-90x^3+34x^2-27x+13),\ x\in\mathbb{R}$;

о) $\dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}},\ x\in(0;+\infty)$; п) $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}},\ x\ne 0$; р) $2^x(\ln 2\cdot\sin x+\cos x),\ x\in\mathbb{R}$;

с) $\dfrac{\cos x+x\ln x\cdot\sin x}{x\ln 2\cdot\cos^2 x},\ x>0,\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

т) $3\sin^2 x\cos x+3x^2\cos x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

3.51. а) 1; б) $12\ln 2$; в) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3.52. а) $f(g(x))=-\dfrac{x+1}{x+3},\ x\ne-1;\ x\ne-3;\ (f(g(x)))'=-\dfrac{2}{(x+3)^2}$;

б) $g(f(x))=\dfrac{3-x}{x-1},\ x\ne 1;\ x\ne 2;\ (g(f(x)))'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$;

в) $g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=\dfrac{x-3}{x-1},\ x\ne 1;\ x\ne 2;\ \left(g\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

3.53. а) $a=-4$; $b=1$; б) $a=2$; $b=5$.

3.54. а) $2e$; б) $2e^3-9$.

3.55. а) $\omega(0)=2\sin 3-6\ln 2$; $v(0)=4\sin 3-12\ln 2$; б) $\omega(1)=2\sin 1-48\ln 2$; $v(1)=4\sin 1-96\ln 2$.

3.57. -2.
3.58. $y=-x+2$.
3.59. $y=4-3x$.
3.60. Например, $y=-x^3+x$.
3.61. $a\in[59;63]$.
3.62. 54.
3.63. 38.
3.64. $\operatorname{arctg}\frac{3}{28}$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{49}$.
3.65. 3.
3.66. -6; $y=11x+79$.
3.67. $y=-x+3$.
3.68. 0.
3.69. 2,5.
3.70. $y=0$ или $y=\frac{64}{27}x-\frac{1024}{729}$.
3.71. $y=2x+5$ или $6x+9y-61=0$.
3.72. $(-3; 11)$.
3.73. $a=1$; $x=-1$.
3.74. $y=\frac{7-x}{2}$.
3.75. $y=\frac{7+x}{2}$.
3.77. $y=-\frac{x}{2}+\frac{41}{16}$.
3.78. $(2; 12)$.
3.79. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
3.80. $-\frac{16}{125}$.
3.81. $(0; +\infty)$ — множество точек выпуклости, $(-\infty; 0)$ — множество точек вогнутости.
3.82. $x'(10)=10$ м/с, $x''(10)=1$ м/с^2.
3.83. Например, $f(x)=\begin{cases} x^2+x^4\sin\frac{1}{x} \text{ при } x\neq 0, \\ 0 \text{ при } x=0. \end{cases}$
3.84. Например, $f(x)=x|x|$.
3.85. 0.
3.86. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; 2\right]$.

Глава 4

4.1. а) Возрастает; б) убывает; в) убывает.
4.2. а) На $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$ убывает, на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$ возрастает.
4.4. $a\in\{0, 8\}$.

4.5. $a \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]$.

4.6. $a \in [1-\sqrt{3}; 0]$.

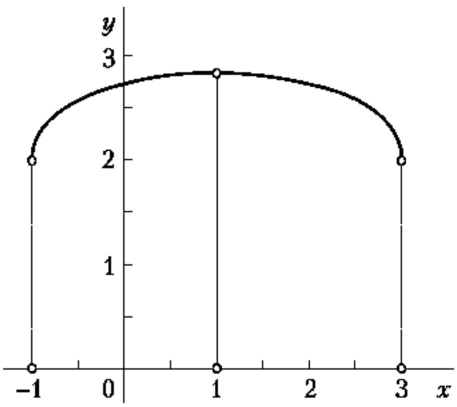
4.7. а) 1; б) –2.

4.8. а) [–2; +∞); б) [1; 2].

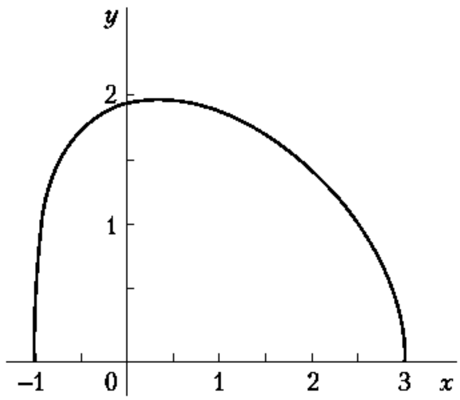
4.9. а) [–2; 2]; б) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$; в) [–1; 25]; г) $\left[1-2\sqrt[3]{2}-\frac{\pi}{2}; 3+\frac{\pi}{2}\right]$.

4.10. а) $x = -1$ и $x = 3$ — точки граничного минимума, $y(-1) = y(3) = 2$, $x = 1$ — точка максимума $y(1) = 2\sqrt{2}$; б) $x = 1/3$ — точка максимума, $y\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{2,4} \cdot 3^{-0,9}$; $x = -1$ и $x = 3$ — точки граничного минимума, $y(-1) = y(3) = 0$; в) $y(-1) = -2$ — максимум, $y(1) = 2$ — минимум; г) $y(-1) = -1/2$ — минимум, $y(1) = 1/2$ — максимум; д) $y(0) = 1$ — максимум; е) $y(2) = 3$ — минимум; ж) $y(-1) = 1$ — минимум; з) $y(-1) = 1$ — минимум; и) $y(1) = 250$ — максимум.

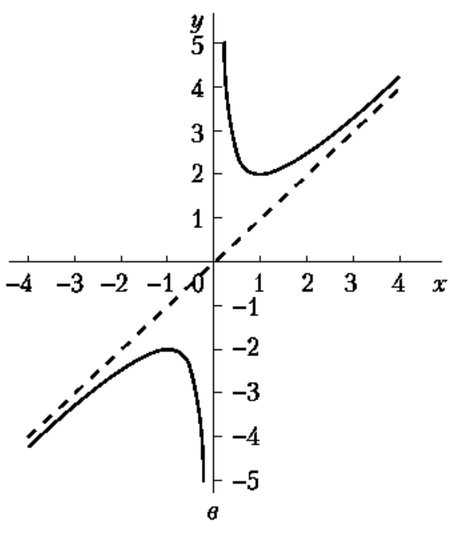
Графики к упражнению 4.10



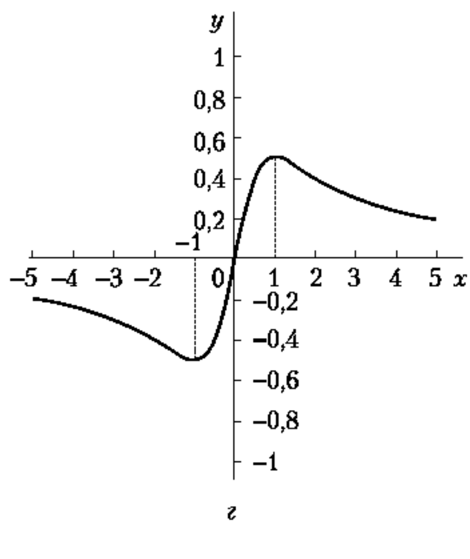
а



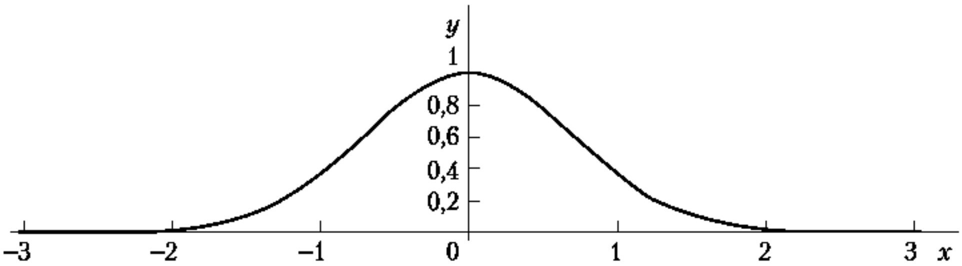
б



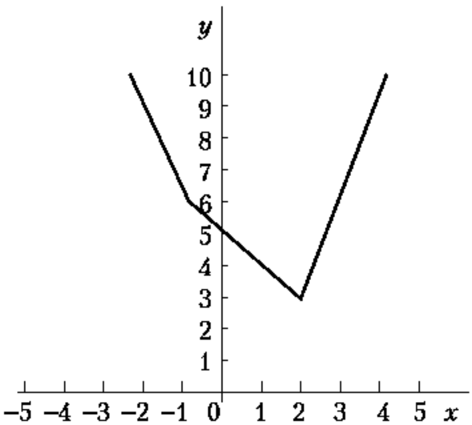
в



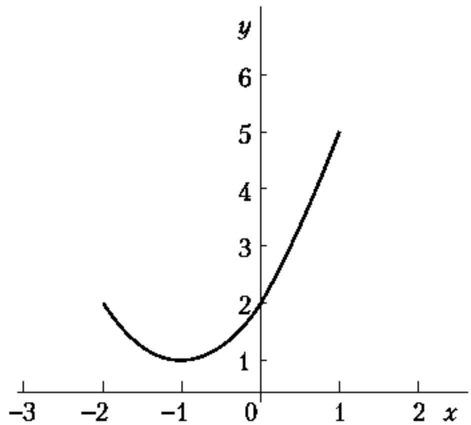
г



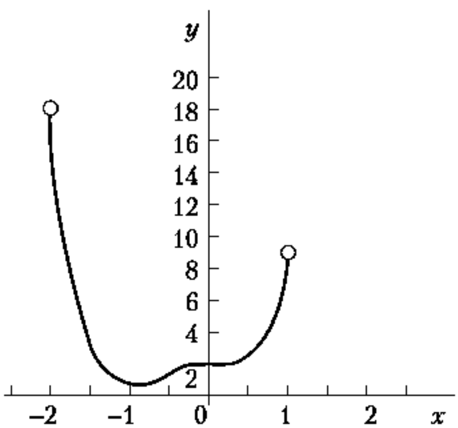
д



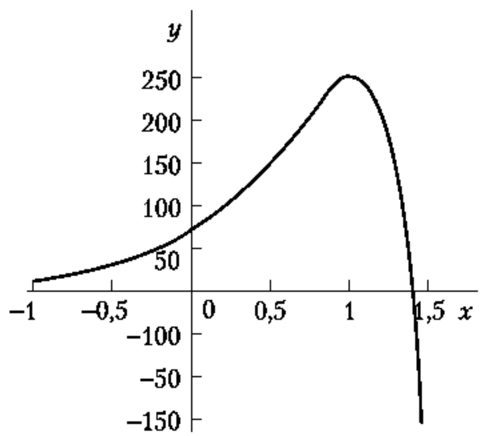
е



ж



з



и

4.11. 27.
4.12. 3.
4.13. –0,3.
4.14. а) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$; б) 0; в) $3\sqrt{2}$.
4.15. $M_1(-2;\ 0)$ или $M_1(0;\ 4)$, $M_2(-1;\ 3)$.
4.16. 20.

4.17. 25.

4.18. 20.

4.19. 18 000 см^3.

4.20. 29 ч.

4.21. 12 км/ч.

4.22. 6.

4.23. 48.

4.24. $\dfrac{ab}{|a-b|}$.

4.25. $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{30}$ ч.

4.26. $\alpha=\dfrac{\pi}{4}, l_{\max}=\dfrac{v^2}{g}, h_{\max}=\dfrac{v^2}{4g}$.

4.27. 100.

4.28. 50.

4.29. 8/9.

4.30. $\alpha = \arccos 0{,}6$.

4.31. $\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

4.32. а) Наклонная: $y = 2x$, при $x \to -\infty$ — сверху, при $x \to +\infty$ — снизу; вертикальная: $x = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y(x)=-\infty$; б) горизонтальная: $y = 0$, с обеих сторон; в) горизонтальная левосторонняя: $y = -1$, снизу, горизонтальная правосторонняя: $y = 1$, сверху; вертикальная $x = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} y(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y(x)=+\infty$; г) наклонная: $y = 2x$, при $x \to -\infty$ — снизу, при $x \to +\infty$ — сверху.

4.33. 25%.

4.34. 10.

4.35. $40 \cdot 10^6$ л/день.

4.36. 30 м/с.

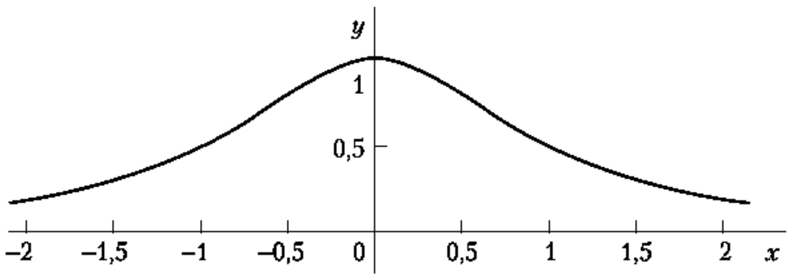
4.37. а) $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ — области выпуклости, $[-1; 1]$ — область вогнутости, $x = -1$ и $x = 1$ — точки перегиба; б) $(-\infty; 0]$ — область выпуклости, $[0; +\infty)$ — область вогнутости, $x = 0$ — точка перегиба; в) $\left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ — области выпуклости, $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ — область вогнутости, $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — точки перегиба; г) $[\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, — области выпуклости, $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, — область вогнутости, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки перегиба; д) $(-\infty; +\infty)$ — область выпуклости; е) $(0; +\infty)$ — область выпуклости; ж) $[e^{-3/2}; +\infty)$ — область выпуклости, $(0; e^{-3/2}]$ — область вогнутости, $x = e^{-3/2}$ — точка перегиба.

4.39. а) x_1 — точка минимума, x_2 — точка максимума; б) на $(-\infty; -3)$, $(2; +\infty)$ — убывает, на $(-3; 2)$ — возрастает; в) не может.

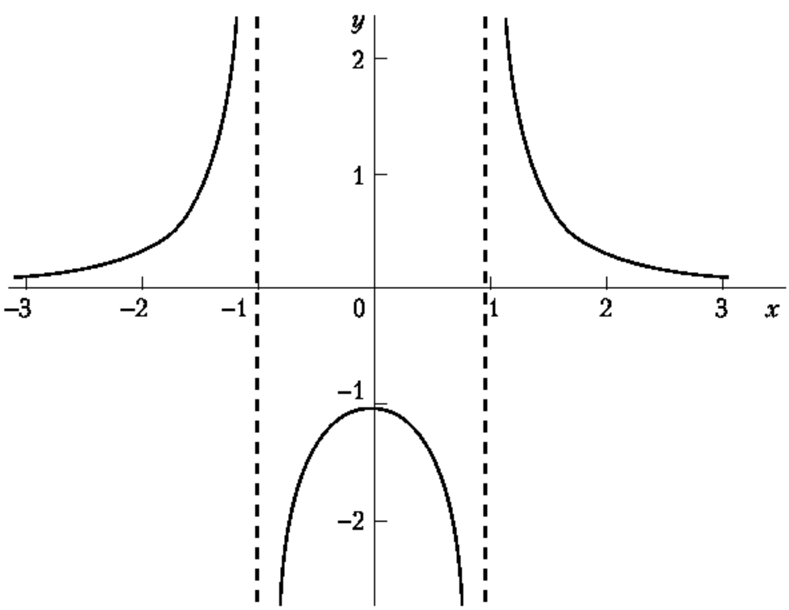
4.40. Не более 4.

4.41. а) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 1$; $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегиба, $y_{1,2} = \frac{3}{4}$; $y = 0$ — горизонтальная асимптота; б) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = -1$; $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $x = -1$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты; в) $x_1 = -1-\sqrt{6}$ — точка максимума, $y_1 = -5-2\sqrt{6}$; $x_2 = -1+\sqrt{6}$ — точка минимума, $y_2 = -5+2\sqrt{6}$; $y = x - 4$ — асимптота; $x = -1$ — вертикальная асимптота; г) $x_1 = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}1$ — точка максимума, $y_1 \approx 0{,}34$; $x_2 = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} \approx 3{,}4$ — точка минимума, $y_1 \approx 1{,}7$; $y = 2$, $x = -3$, $x = 1$ — асимптоты; д) экстремумов и точек перегиба нет, функция всюду вогнута; $x = 0$ — вертикальная асимптота; е) $x = e^{-1}\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$ — точка минимума, $y(e^{-1}) = -e^{-1}$, функция всюду выпукла.

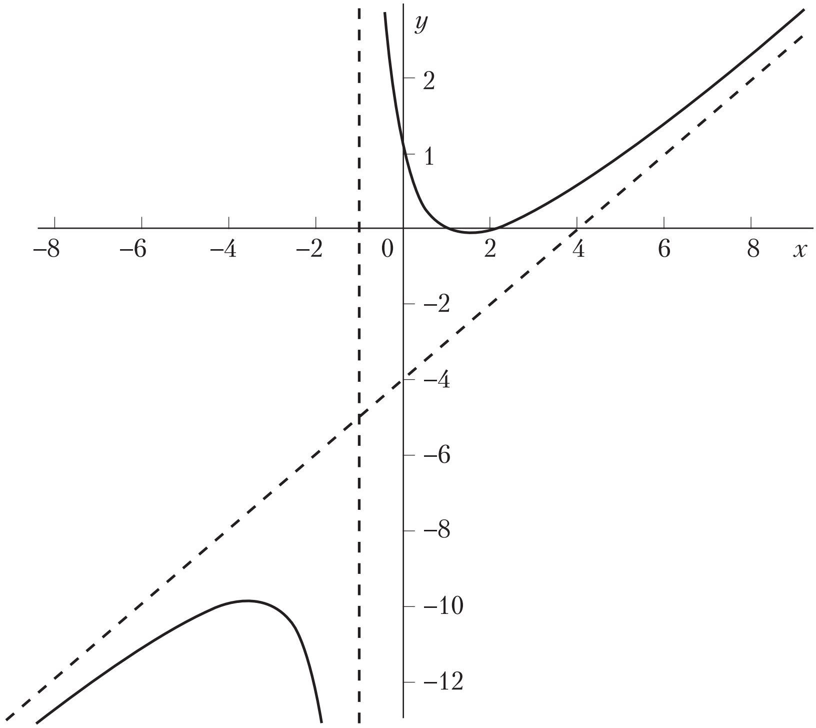
Графики к упражнению 4.41



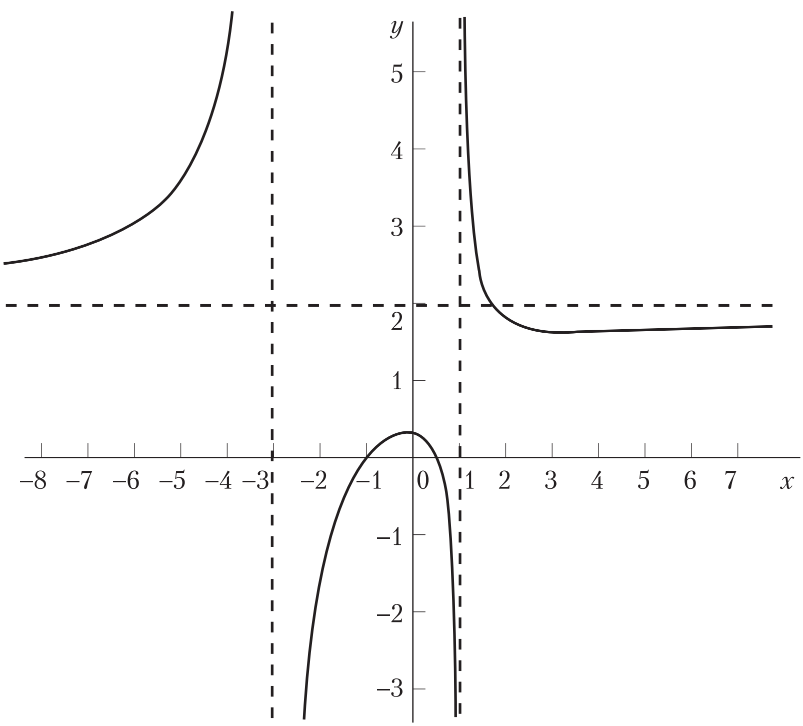
а



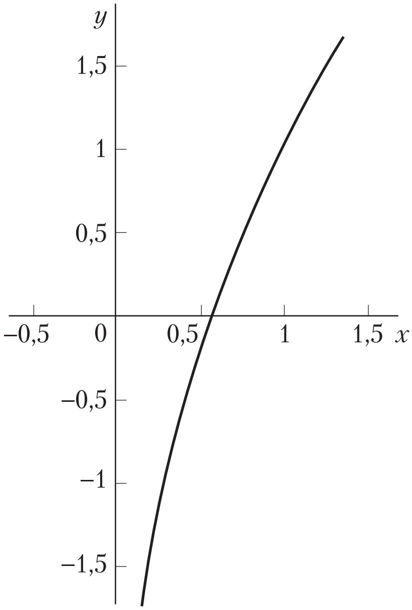
б



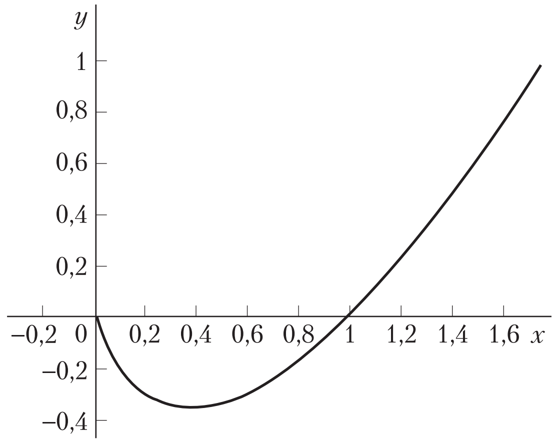
в



г

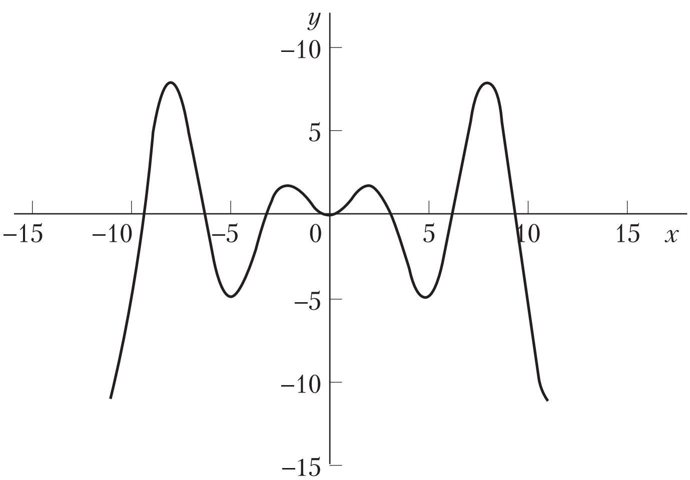


д

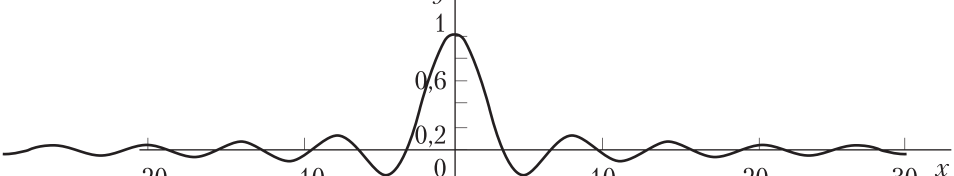


е

Графики к упражнению 4.42



а



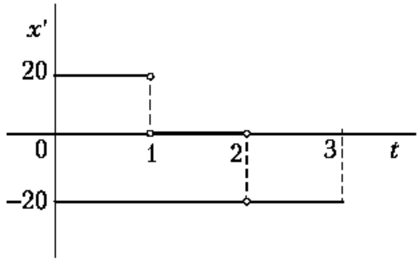
б

4.43. Функция непрерывна всюду, общего вида; $x = -2$ и $x = 1$ — нули функции, на $(-\infty; -2)$ положительпа, па $(-2; 1) \cup (1; +\infty)$ отрицательна; асимптот нет, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$; $(-1; -4)$ — точка минимума, $(1; 0)$ — точка максимума, на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$ убывает, на $[-1; 1]$ возрастает; на $(-\infty; 0]$ вынукла, на $[0; +\infty)$ вогнута, $(0; -2)$ — точка перегиба.

4.44. Первый час велосипедист ехал с ностоянной скоростью 20 км/ч, второй час стоял на месте, третий час ехал со скоростью 20 км/ч в обратном направлении;

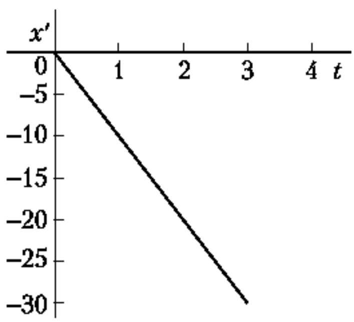
$$x(t) = \begin{cases} 20t & \text{при } t \in [0; 1], \\ 20 & \text{при } t \in (1; 2), \\ 60 - 20t & \text{при } t \in [2; 3]; \end{cases} \quad x'(t) = \begin{cases} 20 & \text{при } t \in [0; 1), \\ 0 & \text{при } t \in (1; 2), \\ -20 & \text{при } t \in (2; 3]. \end{cases}$$

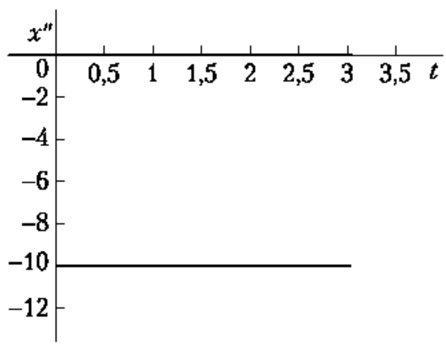
График к упражнению 4.44



4.45. $x = 45 - 5t^2$, $x' = -10t$, $x'' = -10$.

Графики к упражнению 4.45





Глава 5

5.2. Например: $F(x) \equiv 0$, $\int 0 \cdot dx \equiv C = \text{const}$.

5.3. $\int 2dx = 2x + C$.

5.4. $F(x) = \dfrac{x^4 + 15}{4}$.

5.5. $F(x) = e^x - 1$.

5.6. $F(x) = -\cos x$.

5.7. $F(x) = \dfrac{2}{3}\sin(3x + 6) - \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{2x - 1}{5}\right|$.

5.8. $F(x)=\ln|\cos(x-1)|+e^{2x-2}-1$.

5.9. а) $F(x)=2\sqrt{2x+1}+C$; б) $F(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}-2\ln|x-1|+C$;
в) $F(x)=\dfrac{(\sin x-2)^2}{2}+4\ln(\sin x+2)+C$; г) $F(x)=2\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$;
д) $F(x)=\dfrac{9}{4}\arcsin\dfrac{2x}{3}+\dfrac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+C$.

5.10. а) 1; б) 0,5; в) 1,5; г) 16/3; д) 0; е) 0; ж) 10; з) 1; и) $2(\sqrt{3}-1)$; к) $\dfrac{3}{2}+\ln 2$.

5.11. 1/6.
5.12. 1,125.
5.13. 18.
5.14. ln4.

5.15. а) 34/3; б) 25,5; в) $3\sqrt[3]{4}$; г) 8; д) 0,5; с) 0,6. ж) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

5.16. $\dfrac{1}{3}+\ln 2$.

5.17. 0,5.
5.18. 7/3.
5.19. 1.

5.20. $\dfrac{1}{3}\pi R^2H$.

5.21. $\dfrac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$.

5.22. $\dfrac{\pi h^2}{2}$.

5.23. $x(t)=6t^2-t^3$; $x_{\max}=x(4)=32$; $x_{\min}=x(7)=-49$; $S=113$.

5.24. $h_{\max}=21{,}25$ м, $t=\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}\approx 2{,}56$ с.

5.25. 60 м/с.
5.26. 80 м.

График к упражнению 5.23

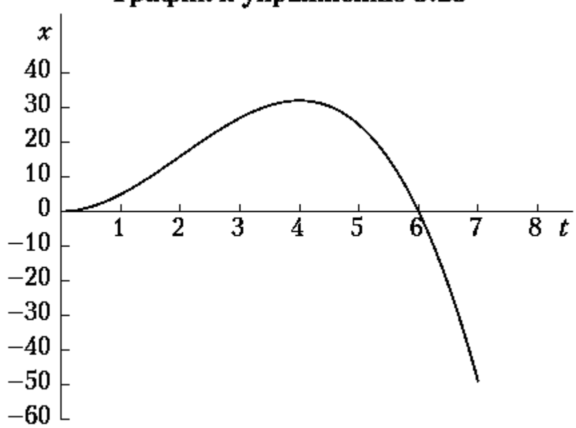
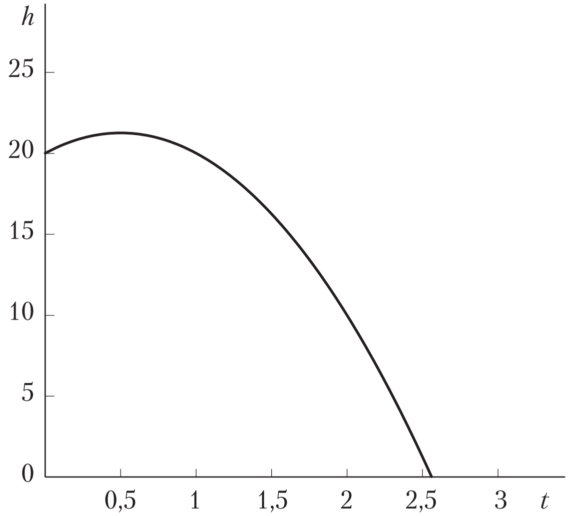


График к упражнению 5.24



Предметный указатель

Учебное издание

Соколов Александр Валерьевич,
Шагин Вадим Львович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Учебное пособие для СПО

Формат $70 \times 100\ ^1/_{16}$.
Гарнитура «Petersburg». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 19,01.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru